

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #1 – Základy & odhady faktoriálu a kombinačních čísel

Cvičící: Eliška Červenková

1. 10. 2025

Řešení

Příklad 1. (a) $10 \cdot 9 \cdot 8$

(b) $\binom{10}{3}$

(c) $\binom{10}{3}$ (trojúhelník ABC je tentýž jako BCA apod.)

Příklad 2 (Tětivy). Každá dvojice tětiv udává čtveřici vrcholů, jejich konců. Naopak, zvolíme-li čtveřici vrcholů, lze už vybrat jen jednu dvojici tětiv tak, aby se protínaly. (U zbylých dvou možností se tětivy neprotínají.) Celkem jich tak bude $\binom{n}{4}$.

Příklad 3 (Kuličky). (a) $\binom{n}{k} \cdot k!$ (Nejprve vybereme k barev, pro každou takovou k -tici pak existje $k!$ možných uspořádání do řady)

(b) n^k (máme k pozic v řadě, na každou z nich vybíráme 1 z n barev)

(c) $\binom{n}{k}$ (Nezáleží na pořadí, jediná podmínka je mít k různých barev z n)

(d) $\binom{n+k-1}{k}$ (Nejjednodušeji přes stars and bars: přihrádky představují barvy, k kuliček v nich rozmístěných pak počet kuliček dané barvy. Máme tak $n-1$ oddělovačů a k kuliček, tedy celkem 2 druhy "předmětů" umisťovných na $n-1+k$ pozic, jakmile vybereme pozice pro jeden druh, je tím jednoznačně určena celá řada)

POZOR! Zatímco případy (a) a (c) se liší jenom v přenásobení $k!$, v případech (b) a (d) tomu tak není. Intuice by nám sice mohla říkat, že jediný rozdíl je v (ne)uspořádanosti, tedy stačí výsledek (b) vydělit $k!$, ale nezapomeňte, že se nám tady mohou opakovat barvy. Uvažte např. konkrétní výběr 3 kuliček 2 barev (M, M, Č). Celkový počet uspořádání do řady je 3 (MMČ, MČM, ČMM), a ne $3! = 6$. Výsledek by se dal jistě i upočítat přes nějakou šílenou sumu, kde byste museli rozlišit všechny případy počtu konkrétních barev, toto je ale mnohem elegantnější a jednodušší řešení. (Ještě poznámka, jak si rychle ověřit, že výsledek nebude $\frac{n^k}{k!}$ - počet způsobů jak vybrat kuličky, musí být nezáporné celé číslo; když si zvolíte např. $n = 3$ a $k = 2$, celé číslo nedostanete)

Příklad 4. Pro velmi velké n seřadte podle velikosti:

(a) 10^n (každé číslo z $[n]$ můžeme zobrazit na libovolné číslo z $[10]$)

(b) $n!$ (Pro číslo 1 máme 10 možností, pro číslo 2 už jen 9 atd.)

(c) $\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)^n$ (každé číslo z $[n]$ můžeme zobrazit na libovolný násobek 2 z $[n]$)

(d) $\left(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor\right)^n$ (každé číslo z $[n]$ můžeme zobrazit na libovolný násobek 3 z $[n]$)

$$10^n \stackrel{(i)}{\ll} \left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)^n \stackrel{(ii)}{\ll} n! \stackrel{(iii)}{\ll} \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^n$$

(i) $10 \ll \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

(ii) $\left(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor\right)^n \ll e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$

(iii) Tady je pěkný důkaz indukcí. Pro $n = 6$ nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro n . Pak

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{2}\right) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \left(\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \left(\frac{n}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{2}\right) \left(1 + n \cdot \frac{1}{n} + \dots\right) \ll n! \cdot \frac{n+1}{2} \cdot 2 = (n+1)! \end{aligned}$$

Příklad 5.

$$1000n \stackrel{(i)}{\ll} n \log n \stackrel{(ii)}{\ll} n\sqrt{n} \stackrel{(iii)}{\ll} \frac{1}{2}n(n+1) \stackrel{(iv)}{\ll} 1.1^n$$

- (i) $1000 \ll \log n$
- (ii) $\log n \ll \sqrt{n}$
- (iii) $\sqrt{n} \ll \frac{1}{2}(n+1)$
- (iv) $n^k \ll a^n$

Příklad 6.

$$n^5 \stackrel{(i)}{\ll} n^{\sqrt{n}} \stackrel{(ii)}{\ll} \binom{2n}{n} \stackrel{(iii)}{\ll} \sqrt{n}^n \stackrel{(iv)}{\ll} n! \stackrel{(v)}{\ll} n^n$$

- (i) $5 \ll \sqrt{n}$
- (ii) Stirling:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\pi n}$$

a platí

$$(\sqrt{n} + 1) \log n < n \log 4 - \log \pi = \log \frac{4^n}{\pi n}$$

- (iii) Stirling jako v (ii) + $\ln$ dává

$$\begin{aligned} \ln \binom{2n}{n} &\sim \ln \frac{4^n}{\pi n} = n \ln 4 - \ln \pi - \ln n, \\ \ln(\sqrt{n})^n &= \frac{n}{2} \ln n, \end{aligned}$$

a platí

$$n \ln 4 - \ln \pi < \frac{n+2}{2} \ln n,$$

- (iv) Stirling + $\ln$ dává

$$\begin{aligned} \ln n! &\sim \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \ln n - n \ln e, \\ \ln(\sqrt{n})^n &= \frac{n}{2} \ln n, \end{aligned}$$

a platí

$$1 + n < \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \frac{n}{2} \ln n$$

- (v) $n! \ll n^n$

Příklad 7. Využijeme $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$:

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m} > \binom{2m}{m},$$

jelikož $\binom{2m}{m-1} > 0$. Dále přímým výpočtem $\binom{2m}{m-1} < \binom{2m}{m}$, a tedy platí

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m} < 2 \cdot \binom{2m}{m}.$$

Příklad 8. Kolik řešení (a, b, c) má rovnice $a + b + c = 10$

- (a) Klasické stars and bars, přihrádky odpovídají členům a, b, c - ty budou definované dvěma oddělovači. Kuličky v jednotlivých přihrádkách pak reprezentují konkrétní hodnoty a, b, c (např. $*****|*|***$ kóduje $a = 6, b = 1, c = 3$ nebo $***|*****$ kóduje $a = 0, b = 3, c = 7$). Tedy konkrétní řešení kóduje posloupnost 2 oddělovačů a 10 kuliček, celkový počet takovýchto různých posloupností je $\binom{12}{2}$ (jakmile vybereme pozice pro oba oddělovače, je posloupnost jednoznačně určena (ekvivalentně je jzn určena pozicemi kuliček)).
- (b) Oproti (a) nepovolujeme nulové hodnoty. Možné jsou 2 přístupy
- (i) 10 kuliček chceme rozdělit 2 oddělovači - ty můžeme umístit pouze do mezer mezi kuličkami (těch je 9), protože umístěním oddělovače na kraj dostaneme prázdnou první nebo poslední přihrádku, navíc do jedné mezery lze umístit nejvýše 1 oddělovač (ať nevznikne přihrádka s 0 kuličkami). Celkem $\binom{9}{2}$.
- (ii) Podmínku nenulovosti můžeme zajistit tak, že si 3 kuličky už předem umístíme do přihrádek (do každé jednu). Zbyde nám 7 kuliček a ty si stejně jako v (a) rozdělíme do 3 přihrádek (tady už se 0 vyskytovat může) a ty pak do přihrádek umístíme. (dá se na to dívat jako na $a = 1 + a', b = 1 + b', c = 1 + c'$, kde a', b', c' jsou nezáporná celá čísla; pak $a + b + c = a' + b' + c' + 3 = 10$, což odpovídá řešení rovnice $a' + b' + c' = 7$ jako v (a))
- (c) Jsou-li a, b, c sudé, dostaneme $a + b + c = 2a' + 2b' + 2c' = 10$ pro a', b', c' z množiny kladných celých čísel, vydělíme 2 a počítáme jako v (b). Výsledek je $\binom{4}{2}$.

Příklad 9. (a) U takového malého roznásobení je dobré počítat klidně "ručně", tj. rozepsat si všechny možnosti, ať si uvědomíte, co přesně ovlivňuje daný koeficient. Hledáme všechny možnosti, jak vybrat z každé závorky jeden člen, aby po jejich vynásobení vyšlo x , což je tehdy, když součet exponentů vybraných členů bude právě 1. Počet takovýchto možností nám dá příslušný koeficient. Roznásobením může x vzniknout pouze jako součin $1 \cdot 1 \cdot x$, přičemž záleží, ze které závorky bereme 1 a ze které x . Celkem to jsou 3 možnosti, tedy koeficient je 3. Obdobně x^2 může vzniknout pouze jako součin $1 \cdot 1 \cdot x^2$ (3 možnosti) nebo $1 \cdot x \cdot x$ (3 možnosti). Tedy koeficient je 6.

Obecný postup by vypadal takto: (např. pro x^2) Hledáme všechna řešení rovnice $a + b + c = 2$, kde $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ jsou exponenty x v jednotlivých závorkách, tj. $a = 0, b = 1, c = 1$ odpovídá násobení $1 \cdot x \cdot x$. Každé takové řešení do výsledného koeficientu přispěje jedničkou. Tedy koeficient je počet takovýchto řešení.

- (b) Obecný postup pomocí stars and bars jako v (a), řešení je $\binom{26}{19}$.
- (c) Vytkneme x^2 , dostaneme $x^8(1 + x + x^2 + \dots)^4$, tedy potřebujeme spočítat koeficient u x^7 v $(1 + x + x^2 + \dots)^4$. Řešení je $\binom{10}{3}$.
- (d) 0, roznásobujeme jen součty sudých mocnin, lichou mocninu nikdy nedostaneme.