

# Kombinatorika a grafy 1

## Cvičení #1 – Základy & odhady faktoriálu a kombinačních čísel

Cvičící: Eliška Červenková

1. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

### Kombinační čísla

Opakování: Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , je zkrácený zápis za výraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

a vyjadřuje počet  $k$ -prvkových podmnožin množiny o  $n$  prvcích.

**Příklad 1.** (a) Závodu se účastnilo 10 běžců. Kolik je možností, jak můžou vypadat stupně vítězů?

(b) Na táboře s 10 dětmi je potřeba určit trojčlennou noční hlídku. Kolik je možností?

(c) Je dán konvexní 10úhelník. Kolik trojúhelníků má všechny své vrcholy mezi vrcholy 10úhelníku?

**Příklad 2** (Tětivy). Kolik je v konvexním  $n$ -úhelníku dvojic tětiv, které se protínají? (Tětivy se stejným koncovým bodem se neprotínají)

**Příklad 3** (Kuličky). Z neomezené zásoby kuliček  $n$  různých barev jich chceme vybrat  $k$ . Kolik je možností, pokud kuličky:

(a) musí mít různé barvy a dáváme je do řady?

(c) musí mít různé barvy a dáváme je do pytle?

(b) mohou mít stejné barvy a dáváme je do řady?

(d) mohou mít stejné barvy a dáváme je do pytle?

### Asymptotické odhady

Opakování:  $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{Stirlingův odhad})$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$$

**Příklad 4.** Pro velmi velké  $n$  seřadte podle velikosti:

(a) Počet všech funkcí  $f: [n] \rightarrow [10]$ .

(c) Počet funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ , kde každé  $f(i)$  je násobkem 2.

(b) Počet prostých funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ .

(d) Počet funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ , kde každé  $f(i)$  je násobkem 3.

**Příklad 5.** Pro velmi velké  $n$  seřadte následující výrazy podle velikosti:

$$1000n, \quad \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1.1^n, \quad n\sqrt{n}, \quad n \log n.$$

**Příklad 6.** Pro velmi velké  $n$  seřadte následující výrazy podle velikosti:

$$\binom{2n}{n}, \quad n!, \quad n^n, \quad (\sqrt{n})^n, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad n^5.$$

**Příklad 7.** Odhadněte  $\binom{2m+1}{m}$  z obou stran pomocí  $\binom{2m}{m}$ .

## Stars and bars

Opakování: Počet možností jak uspořádat  $s$  hvězdiček (typicky reprezentujících věci) a  $b$  oddělovačů (typicky reprezentujících hranice mezi přihrádkami) je  $\binom{s+b}{b}$ .

**Příklad 8.** Kolik řešení  $(a, b, c)$  má rovnice  $a + b + c = 10$

- (a) v množině  $\mathbb{N}_0$  nezáporných celých čísel?
- (b) v množině  $\mathbb{N}$  kladných celých čísel?
- (c) v množině sudých kladných celých čísel?

**Příklad 9.** (a) Představme si, že roznásobíme výraz  $(1 + x + x^2)^3$ . Určete koeficienty u  $x$  a u  $x^2$ .

- (b) Určete koeficient u  $x^7$  v roznásobeném výrazu  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^{20}$ ,
- (c) Určete koeficient u  $x^{15}$  v roznásobeném výrazu  $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$ ,
- (d) Určete koeficient u  $x^{17}$  v roznásobeném výrazu  $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^{10}$ .

# Kombinatorika a grafy 1

## Cvičení #1 – Základy & odhady faktoriálu a kombinačních čísel

Cvičící: Eliška Červenková

1. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

### Kombinační čísla

Opakování: Kombinační číslo  $\binom{n}{k}$ , je zkrácený zápis za výraz

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

a vyjadřuje počet  $k$ -prvkových podmnožin množiny o  $n$  prvcích.

**Příklad 1.** (a) Závodu se účastnilo 10 běžců. Kolik je možností, jak můžou vypadat stupně vítězů?

(b) Na táboře s 10 dětmi je potřeba určit trojčlennou noční hlídku. Kolik je možností?

(c) Je dán konvexní 10úhelník. Kolik trojúhelníků má všechny své vrcholy mezi vrcholy 10úhelníku?

**Příklad 2** (Tětivy). Kolik je v konvexním  $n$ -úhelníku dvojic tětiv, které se protínají? (Tětivy se stejným koncovým bodem se neprotínají)

**Příklad 3** (Kuličky). Z neomezené zásoby kuliček  $n$  různých barev jich chceme vybrat  $k$ . Kolik je možností, pokud kuličky:

(a) musí mít různé barvy a dáváme je do řady?

(c) musí mít různé barvy a dáváme je do pytle?

(b) mohou mít stejné barvy a dáváme je do řady?

(d) mohou mít stejné barvy a dáváme je do pytle?

### Asymptotické odhady

Opakování:  $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (\text{Stirlingův odhad})$$

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$\frac{2^{2n}}{2\sqrt{n}} \leq \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n}}$$

**Příklad 4.** Pro velmi velké  $n$  seřaďte podle velikosti:

(a) Počet všech funkcí  $f: [n] \rightarrow [10]$ .

(c) Počet funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ , kde každé  $f(i)$  je násobkem 2.

(b) Počet prostých funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ .

(d) Počet funkcí  $f: [n] \rightarrow [n]$ , kde každé  $f(i)$  je násobkem 3.

**Příklad 5.** Pro velmi velké  $n$  seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$1000n, \quad \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1.1^n, \quad n\sqrt{n}, \quad n \log n.$$

**Příklad 6.** Pro velmi velké  $n$  seřaďte následující výrazy podle velikosti:

$$\binom{2n}{n}, \quad n!, \quad n^n, \quad (\sqrt{n})^n, \quad n^{\sqrt{n}}, \quad n^5.$$

**Příklad 7.** Odhadněte  $\binom{2m+1}{m}$  z obou stran pomocí  $\binom{2m}{m}$ .

## Stars and bars

Opakování: Počet možností jak uspořádat  $s$  hvězdiček (typicky reprezentujících věci) a  $b$  oddělovačů (typicky reprezentujících hranice mezi přihrádkami) je  $\binom{s+b}{b}$ .

**Příklad 8.** Kolik řešení  $(a, b, c)$  má rovnice  $a + b + c = 10$

- (a) v množině  $\mathbb{N}_0$  nezáporných celých čísel?
- (b) v množině  $\mathbb{N}$  kladných celých čísel?
- (c) v množině sudých kladných celých čísel?

**Příklad 9.** (a) Představme si, že roznásobíme výraz  $(1 + x + x^2)^3$ . Určete koeficienty u  $x$  a u  $x^2$ .

- (b) Určete koeficient u  $x^7$  v roznásobeném výrazu  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})^{20}$ ,
- (c) Určete koeficient u  $x^{15}$  v roznásobeném výrazu  $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$ ,
- (d) Určete koeficient u  $x^{17}$  v roznásobeném výrazu  $(1 + x^2 + x^4 + \dots)^{10}$ .