

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #6 – Toky v sítích

Cvičící: Eliška Červenková

5. 11. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Toky v sítích

Opakování: *Síť* je uspořádaná pětice (V, E, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf; z a s jsou dva různé vrcholy G (zvané *zdroj* a *stok*); a *kapacita* $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u)$ pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je $w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v, z)$.

Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P . Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu. Maximální tok lze nalézt následujícím algoritmem:

Ford-Fulkersonův algoritmus:

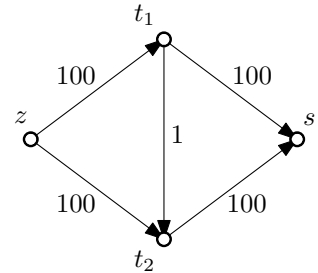
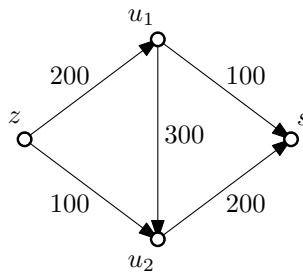
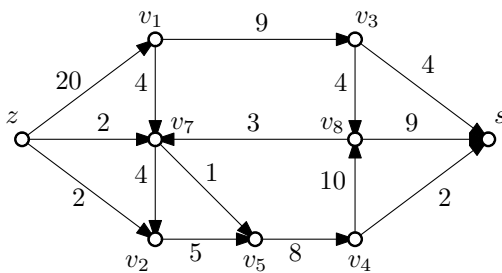
- Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e .
- Najdi nějakou zlepšující cestu a vylepši pomocí ní tok f .

Řezem nazveme podmnožinu E , po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

Věta 1 (Hlavní věta o tocích). *Pro každou síť existuje maximální tok a platí*

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Navíc pokud všechny kapacity jsou celočíselné, existuje maximální tok, který je na každé hraně celočíselný.



Příklad 1. V síti nalevo použijte F.-F. algoritmus k nalezení toku maximální velikosti. Dokažte, že je tok skutečně maximální, tím, že najdete odpovídající řez minimální kapacity.

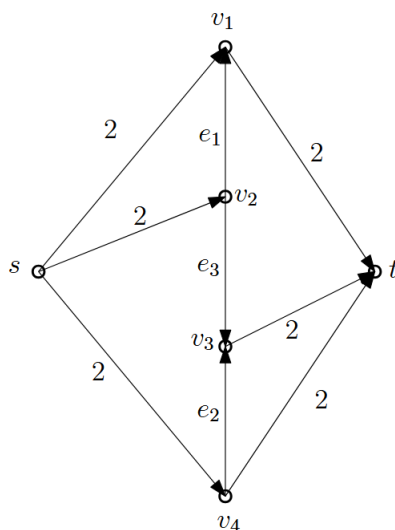
Příklad 2. (a) V síti vprostřed ukažte, že F.-F. algoritmus může dospět ke špatnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen *orientované* zlepšující cesty.

- V síti napravo ukažte, že F.-F. algoritmus může trvat více než 100 kroků, pokud zlepšující cesty volíme hloupě.

Příklad 3. Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.

Příklad 4. Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.

Příklad 5. Jak dlouho poběží Ford–Fulkerson na následující síti, pokud začne cestou sv_2v_3t a potom bude opakovat posloupnost cest $P_1 = sv_4v_3v_2v_1t$, $P_2 = sv_2v_3v_4t$, $P_1, P_3 = sv_1v_2v_3t$? Zbylé kapacity jsou $c(e_1) = r_0 = 1$, $c(e_2) = r$ a $c(e_3) = 1$, kde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tj. $r^2 = 1 - r$.



Příklad 6. (Bonus) Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům — "vrcholem nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času". Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?

Příklad 7. (Bonus) Nechť $G = (V, E)$ je síť tvaru mřížky 5×5 , t.j. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{((x, y), (x + 1, y)) \mid 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\} \cup \{((x, y), (x, y + 1)) \mid 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 4\}$, s kapacitami $c(((x, y), (x, y)))) = \frac{1}{\min\{x+y-1, 10-x-y\}}$. Určete maximální tok ze zdroje $(1, 1)$ do spotřebiče $(5, 5)$.

Pokrytí a párování

Opakování: *Vrcholové pokrytí* ("vertex cover") v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů, co "vidí do všech hran", tj. $(C \subseteq V)(\forall e \in E): e \cap C \neq \emptyset$. Nejmenší vrcholové pokrytí v G značíme $c(G)$.

Párování ("matching") v G je množina disjunktních hran z E . Největší párování v G značíme $m(G)$.

Příklad 8. Königova–Egerváryho věta říká, že v každém *bipartitním* grafu G platí $c(G) = m(G)$.

- Najděte G , kde $c(G) > m(G)$.
- Najděte G , kde $c(G) > m(G) + 10$.
- Ukažte, že pro každé G platí $m(G) \leq c(G) \leq 2 \cdot m(G)$.

Příklad 9. (Bonus) Nechť $G_{n,k}$ je graf incidence množinového systému $\binom{[n]}{k}$ na množině $[n]$. Najděte všechny dvojice (n, k) takové, že $G_{n,k}$ obsahuje párování o velikosti $\binom{n}{k}$.

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #6 – Toky v sítích

Cvičící: Eliška Červenková

5. 11. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Toky v sítích

Opakování: *Síť* je uspořádaná pětice (V, E, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf; z a s jsou dva různé vrcholy G (zvané *zdroj* a *stok*); a *kapacita* $c: E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ je funkce ohodnocující hrany. *Tok v síti* je každá funkce $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $0 \leq f(e) \leq c(e)$ pro každou hranu $e \in E$ a $\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u)$ pro každý vrchol $u \in V$ mimo stok a zdroj. *Velikost toku* je $w(f) = \sum_{v:(z,v) \in E} f(z, v) - \sum_{v:(v,z) \in E} f(v, z)$.

Jako *rezervu hrany* e na nějaké cestě P ze z do s označíme $r(e) = c(e) - f(e)$ pro hranu e orientovanou po směru P a $r(e) = f(e)$ pro hranu orientovanou proti směru P . Cesta P je pak *zlepšující*, pokud všechny její hrany mají kladnou rezervu. Maximální tok lze nalézt následujícím algoritmem:

Ford-Fulkersonův algoritmus:

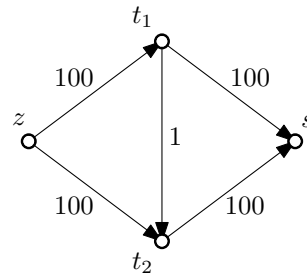
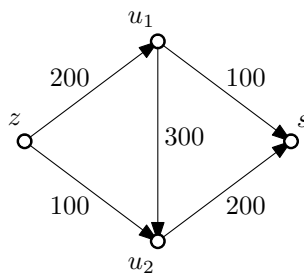
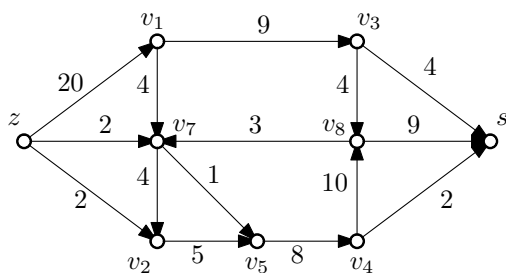
- Polož $f(e) = 0$ pro všechny hrany e .
- Najdi nějakou zlepšující cestu a vylepši pomocí ní tok f .

Řezem nazveme podmnožinu E , po jejímž odstranění neexistuje orientovaná cesta ze zdroje do stoku. *Kapacita řezu* R je $c(R) = \sum_{e \in R} c(e)$.

Věta 2 (Hlavní věta o tocích). *Pro každou síť existuje maximální tok a platí*

$$\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Navíc pokud všechny kapacity jsou celočíselné, existuje maximální tok, který je na každé hraně celočíselný.



Příklad 1. V síti nalevo použijte F.-F. algoritmus k nalezení toku maximální velikosti. Dokažte, že je tok skutečně maximální, tím, že najdete odpovídající řez minimální kapacity.

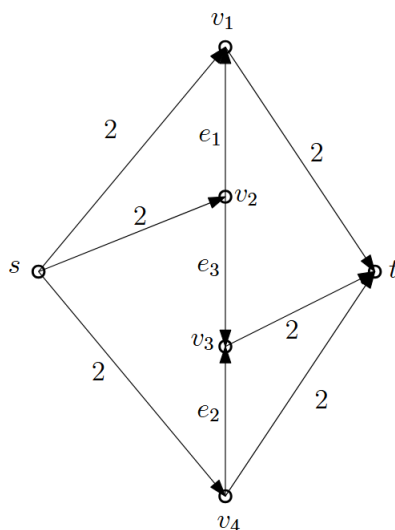
Příklad 2. (a) V síti vprostřed ukažte, že F.-F. algoritmus může dospět ke špatnému výsledku, pokud mu povolíme používat jen *orientované* zlepšující cesty.

- V síti napravo ukažte, že F.-F. algoritmus může trvat více než 100 kroků, pokud zlepšující cesty volíme hloupě.

Příklad 3. Ukažte, že problém hledání maximálního toku v síti, která má více zdrojů a více stoků, lze redukovat na případ s jedním zdrojem a jedním stokem.

Příklad 4. Dokažte, že počet toků maximální velikosti je v každé síti buď jedna nebo je nekonečný.

Příklad 5. Jak dlouho poběží Ford–Fulkerson na následující síti, pokud začne cestou sv_2v_3t a potom bude opakovat posloupnost cest $P_1 = sv_4v_3v_2v_1t$, $P_2 = sv_2v_3v_4t$, $P_1, P_3 = sv_1v_2v_3t$? Zbylé kapacity jsou $c(e_1) = r_0 = 1$, $c(e_2) = r$ a $c(e_3) = 1$, kde $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, tj. $r^2 = 1 - r$.



Příklad 6. (Bonus) Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům — "vrcholem nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času". Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?

Příklad 7. (Bonus) Nechť $G = (V, E)$ je síť tvaru mřížky 5×5 , t.j. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{((x, y), (x + 1, y)) \mid 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 5\} \cup \{((x, y), (x, y + 1)) \mid 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 4\}$, s kapacitami $c(((x, y), (x, y)))) = \frac{1}{\min\{x+y-1, 10-x-y\}}$. Určete maximální tok ze zdroje $(1, 1)$ do spotřebiče $(5, 5)$.

Pokrytí a párování

Opakování: *Vrcholové pokrytí* ("vertex cover") v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů, co "vidí do všech hran", tj. $(C \subseteq V)(\forall e \in E): e \cap C \neq \emptyset$. Nejmenší vrcholové pokrytí v G značíme $c(G)$.

Párování ("matching") v G je množina disjunktních hran z E . Největší párování v G značíme $m(G)$.

Příklad 8. Königova–Egerváryho věta říká, že v každém *bipartitním* grafu G platí $c(G) = m(G)$.

- Najděte G , kde $c(G) > m(G)$.
- Najděte G , kde $c(G) > m(G) + 10$.
- Ukažte, že pro každé G platí $m(G) \leq c(G) \leq 2 \cdot m(G)$.

Příklad 9. (Bonus) Nechť $G_{n,k}$ je graf incidence množinového systému $\binom{[n]}{k}$ na množině $[n]$. Najděte všechny dvojice (n, k) takové, že $G_{n,k}$ obsahuje párování o velikosti $\binom{n}{k}$.