

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #5 – Konečné projektivní roviny & Latinské čtverce

Cvičící: Eliška Červenková

29. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Projektivní roviny

Opakování: Nechť X je konečná množina ("body") a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin ("přímky"). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- (A1) $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}): x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- (A2) $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}): |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- (A3) $(\exists C \subseteq X, |C| = 4): (\forall P \in \mathcal{P}): |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

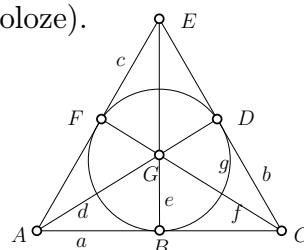
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n + 1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n + 1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Rovina řádu n existuje kdykoliv je n mocnina prvočísla.

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1 (Samoopravný kód). Uvažujme množinu B_n (binárních) stringů délky n . Pro $x, y \in B_n$ označme $d(x, y)$ počet pozic, na kterých se stringy liší. Pro silné samoopravné kódy je dobré najít velkou množinu stringů $M \subseteq B_n$ takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích, tj. $(\forall x, y \in M): d(x, y) \geq 3$ (pak totiž dokážeme "opravit 1 chybu"). Jeden takový teď kód sestojíme:

- (a) Pomocí Fanovy roviny zkonstruuje množinu $F \subseteq B_7$ sedmi stringů délky 7 takových, že každé dva se liší na 4 pozicích, tj. $(\forall x, y \in F): d(x, y) = 4$.
- (b) Pro daný string x označme $\bar{x}$ jeho doplněk, tj. string, který má na každé pozici opačný symbol. Určete $d(\bar{x}, x)$ a $d(\bar{x}, y)$ pro $x \neq y \in F$.
- (c) Najděte množinu $M \subseteq B_7$ celkem 16 stringů takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích.

Příklad 2 (Trojice z devíti). Je dáno několik 3prvkových podmnožin 9prvkové množiny $D = \{1, 2, \dots, 9\}$ takových, že každé dvě podmnožiny mají nejvýše 1 společný prvek.

- (a) Dokažte, že každý prvek $x \in D$ náleží nejvýše čtyřem podmnožinám.
- (b) Dokažte, že podmnožin může být nejvýše 12.
- (c) Najděte příklad 12 takových podmnožin.

Latinské čtverce

Opakování: Latinský čtverec řádu n je tabulka o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \dots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou ortogonální, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \dots, n\}$ existují $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $(a, b) = (L_{ij}, L'_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ latinských čtverců je množinou vzájemně ortogonálních latinských čtverců, pokud každý pár čtverců z této množiny je ortogonální.

Lemma 1. Neexistuje více než $n - 1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu n .

Věta 1. $n - 1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu n existuje právě tehdy, když existuje projektivní rovina řádu n .

Příklad 3. Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávají ortogonalitu.

Příklad 4. Z ortogonálních latinských čtverců A a B řádu n , sestavených z čísel $0, \dots, n - 1$, sestavte čtverec C podle pravidla

$$c_{i,j} = n a_{i,j} + b_{i,j} + 1.$$

Jaké zvláštní vlastnosti má výsledný čtverec C ?

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #5 – Konečné projektivní roviny & Latinské čtverce

Cvičící: Eliška Červenková

29. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Projektivní roviny

Opakování: Nechť X je konečná množina ("body") a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin ("přímky"). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- (A1) $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}): x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- (A2) $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}): |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- (A3) $(\exists C \subseteq X, |C| = 4): (\forall P \in \mathcal{P}): |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

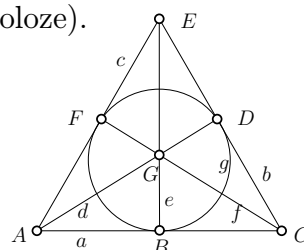
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n + 1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n + 1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Rovina řádu n existuje kdykoliv je n mocnina prvočísla.

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 1 (Samoopravný kód). Uvažujme množinu B_n (binárních) stringů délky n . Pro $x, y \in B_n$ označme $d(x, y)$ počet pozic, na kterých se stringy liší. Pro silné samoopravné kódy je dobré najít velkou množinu stringů $M \subseteq B_n$ takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích, tj. $(\forall x, y \in M): d(x, y) \geq 3$ (pak totiž dokážeme "opravit 1 chybu"). Jeden takový teď kód sestojíme:

- (a) Pomocí Fanovy roviny zkonstruuje množinu $F \subseteq B_7$ sedmi stringů délky 7 takových, že každé dva se liší na 4 pozicích, tj. $(\forall x, y \in F): d(x, y) = 4$.
- (b) Pro daný string x označme $\bar{x}$ jeho doplněk, tj. string, který má na každé pozici opačný symbol. Určete $d(\bar{x}, x)$ a $d(\bar{x}, y)$ pro $x \neq y \in F$.
- (c) Najděte množinu $M \subseteq B_7$ celkem 16 stringů takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích.

Příklad 2 (Trojice z devíti). Je dáno několik 3prvkových podmnožin 9prvkové množiny $D = \{1, 2, \dots, 9\}$ takových, že každé dvě podmnožiny mají nejvýše 1 společný prvek.

- (a) Dokažte, že každý prvek $x \in D$ náleží nejvýše čtyřem podmnožinám.
- (b) Dokažte, že podmnožin může být nejvýše 12.
- (c) Najděte příklad 12 takových podmnožin.

Latinské čtverce

Opakování: Latinský čtverec řádu n je tabulka o rozměrech $n \times n$ nad prvky z $\{1, 2, \dots, n\}$, kde se každé číslo v každém sloupci a řádku vyskytuje právě jednou. Dva latinské čtverce L a L' jsou ortogonální, pokud pro každou uspořádanou dvojici čísel (a, b) z $\{1, 2, \dots, n\}$ existují $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $(a, b) = (L_{ij}, L'_{ij})$. Množina $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$ latinských čtverců je množinou vzájemně ortogonálních latinských čtverců, pokud každý pár čtverců z této množiny je ortogonální.

Lemma 2. Neexistuje více než $n - 1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu n .

Věta 2. $n - 1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců řádu n existuje právě tehdy, když existuje projektivní rovina řádu n .

Příklad 3. Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost být latinským čtvercem a zda tyto operace zachovávají ortogonalitu.

Příklad 4. Z ortogonálních latinských čtverců A a B řádu n , sestavených z čísel $0, \dots, n - 1$, sestavte čtverec C podle pravidla

$$c_{i,j} = n a_{i,j} + b_{i,j} + 1.$$

Jaké zvláštní vlastnosti má výsledný čtverec C ?