

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #4 – Catalanova čísla & Projektivní roviny

Cvičící: Eliška Červenková

22. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

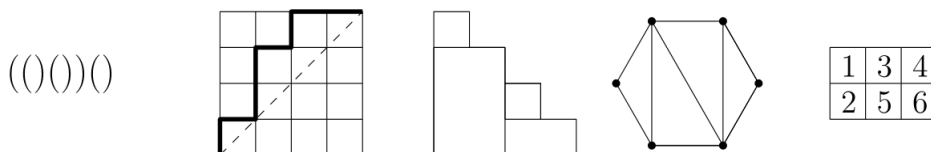
Catalanova čísla

Opakování: Posloupnost $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$ Catalanových čísel je definována jako

$c_0 = c_1 = 1$ a $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$ pro $n \geq 2$. Lze dokázat, že $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Lze dokázat, že c_n je počet binárních stromů s n vnitřními vrcholy (a tedy $n+1$ listy).

Příklad 1. Vyjádřete následující počty pomocí Catalanových čísel:

- Počet korektních uzávorkování pomocí $2n$ závorek (tj. n symbolů "(" a n symbolů ")").
- Počet cest v mřížce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.
- Počet možností, jak rozdělit "schodiště" o $1 + 2 + \dots + n$ políčkách na n pravoúhelníků.
- Počet triangulací konvexního n -úhelníka.
- Počet možností, jak do tabulky $2 \times n$ vyplnit čísla $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby v každém řádku i sloupci čísla rostla.



Projektivní roviny

Opakování: Nechť X je konečná množina ("body") a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin ("přímky"). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- (A1) $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}) : x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
(A2) $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
(A3) $(\exists C \subseteq X, |C| = 4) : (\forall P \in \mathcal{P}) : |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

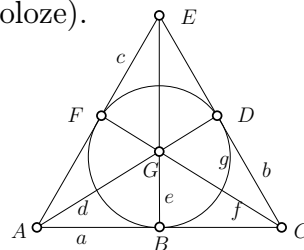
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n+1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n+1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Rovina řádu n existuje kdykoliv je n mocnina prvočísla.

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 2 (Trpaslíci). Sedm trpaslíků si plánuje pracovní týden. Každý ze 7 dní půjdou někteří 4 z nich do práce (těžit drahokamy) a zbylí 3 budou odpočívat a hrát při tom mariáš. Je možné rozplánovat týden tak, aby si každý dva trpaslíci spolu zahráli mariáš?

Příklad 3 (Incidenční graf nemá krátké cykly). *Incidenční graf* roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .

Příklad 4 (Pokrytí). Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .

- (a) Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?
- (b) Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?

Příklad 5 (Alternativní definice). Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3'), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

- (A3') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body
(neboli formálně $(\exists P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P|, |Q| \geq 3$).

Příklad 6 (Grafy bez 4cyklů). Čtyřcyklus je graf $C_4 = K_{2,2}$.

- (a) Pro nekonečně mnoho různých n zkonstruuje graf na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hranami, který neobsahuje jako podgraf čtyřcyklus.
- (b) (Bonus) Dokažte, že graf na n vrcholech bez čtyřcyklu má nejvýše $O(n^{3/2})$ hran.

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #4 – Catalanova čísla & Projektivní roviny

Cvičící: Eliška Červenková

22. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

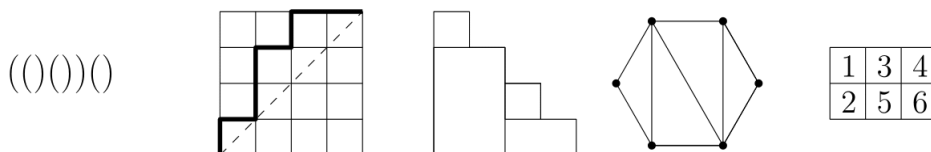
Catalanova čísla

Opakování: Posloupnost $(1, 1, 2, 5, 14, 42, \dots)$ Catalanových čísel je definována jako

$c_0 = c_1 = 1$ a $c_n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot c_{n-1-i}$ pro $n \geq 2$. Lze dokázat, že $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Lze dokázat, že c_n je počet binárních stromů s n vnitřními vrcholy (a tedy $n+1$ listy).

Příklad 1. Vyjádřete následující počty pomocí Catalanových čísel:

- Počet korektních uzávorkování pomocí $2n$ závorek (tj. n symbolů "(" a n symbolů ")").
- Počet cest v mřížce z bodu $[0, 0]$ do bodu $[n, n]$, které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.
- Počet možností, jak rozdělit "schodiště" o $1 + 2 + \dots + n$ políčkách na n pravoúhelníků.
- Počet triangulací konvexního n -úhelníka.
- Počet možností, jak do tabulky $2 \times n$ vyplnit čísla $1, 2, \dots, 2n$ tak, aby v každém řádku i sloupci čísla rostla.



Projektivní roviny

Opakování: Nechť X je konečná množina ("body") a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ systém jejích podmnožin ("přímky"). Potom dvojici $(X, \mathcal{P})$ nazveme *konečnou projektivní rovinou*, pokud splňuje následující axiomy:

- $(\forall x \neq y \in X)(\exists! P \in \mathcal{P}): x, y \in P$ (každými dvěma body prochází právě jedna přímka).
- $(\forall P \neq Q \in \mathcal{P}): |P \cap Q| = 1$ (každé dvě přímky se protínají v právě jednom bodě).
- $(\exists C \subseteq X, |C| = 4): (\forall P \in \mathcal{P}): |C \cap P| \leq 2$ (existují 4 body v obecné poloze).

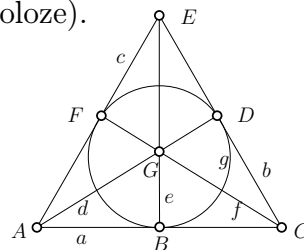
Lze dokázat, že každá konečná projektivní rovina $(X, \mathcal{P})$ má nějaký *řád*.

V rovině řádu n každý bod leží na právě $n+1$ přímkách a každá přímka obsahuje právě $n+1$ bodů.

Rovina řádu n obsahuje právě $n^2 + n + 1$ přímek a právě $n^2 + n + 1$ bodů.

Rovina řádu n existuje kdykoliv je n mocnina prvočísla.

Příkladem konečné projektivní roviny řádu 2 je *Fanova rovina*:



Příklad 2 (Trpaslíci). Sedm trpaslíků si plánuje pracovní týden. Každý ze 7 dní půjdou někteří 4 z nich do práce (těžit drahokamy) a zbylí 3 budou odpočívat a hrát při tom mariáš. Je možné rozplánovat týden tak, aby si každý dva trpaslíci spolu zahráli mariáš?

Příklad 3 (Incidenční graf nemá krátké cykly). *Incidenční graf* roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .

Příklad 4 (Pokrytí). Uvažme konečnou projektivní rovinu $(X, \mathcal{P})$ řádu n .

- (a) Kolik nejméně přímek z $\mathcal{P}$ musíme zvolit, aby každý prvek $x \in X$ ležel na aspoň jedné přímce?
- (b) Kolik nejméně bodů z X musíme zvolit, aby na každé přímce $P \in \mathcal{P}$ ležel aspoň jeden vybraný bod?

Příklad 5 (Alternativní definice). Dokažte, že pokud v definici nahradíme axiom (A3) následujícím axiomem (A3'), tak dostaneme ekvivalentní definici konečné projektivní roviny:

- (A3') Existují aspoň 2 různé přímky $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, z nichž každá má aspoň 3 body
(neboli formálně $(\exists P \neq Q \in \mathcal{P}) : |P|, |Q| \geq 3$).

Příklad 6 (Grafy bez 4cyklů). Čtyřcyklus je graf $C_4 = K_{2,2}$.

- (a) Pro nekonečně mnoho různých n zkonstruuje graf na n vrcholech s $\Omega(n^{3/2})$ hranami, který neobsahuje jako podgraf čtyřcyklus.
- (b) (Bonus) Dokažte, že graf na n vrcholech bez čtyřcyklu má nejvýše $O(n^{3/2})$ hran.