

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #2 – Vytvořující funkce podruhé

Cvičící: Eliška Červenková

15. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Vytvořující funkce

Opakování: Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná.

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Zobecněná binomická věta: Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Důsledek: Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

Příklad 1. (Příklady označené * jsou z minulého cvičení) Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru, tj. bez sumy):

- (a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
- (b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,
- (c) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.
- (d) $(1, 4, 9, 16, \dots)$.
- (e) $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$,

Vzorec pro n -tý člen

Příklad 2. (Příklady označené * jsou z minulého cvičení) Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností:

- (a) $a_0 = 2, a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.
- (b) $a_0 = 3, a_1 = 5$ a $a_{n+1} = 3a_n - 4$ pro $n \geq 0$.
- (c) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$
- (d) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1$
- (e) $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2^{n+1}$
- (f) $a_0 = 1, a_1 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$
- (g) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 1 + \sum_{k=0}^n a_k$
- (h) $a_0 = 2, a_1 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pro $n \geq 0$
- (i) $a_0 = 1, a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Recept:

- (i) Označte $F(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, a_3 \dots)$.
- (ii) Napište podobně posloupnosti, které mají vytvořující funkce $xF(x)$ a $x^2F(x)$.
- (iii) Přičtěte k $F(x)$ vhodné násobky $xF(x)$ a $x^2F(x)$, aby se skoro vše vynulovalo.
- (iv) Vyjádřete $F(x)$ (vyjde zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynomy v x).
- (v) Najděte kořeny jmenovatele a rozložte na parciální zlomky
- (vi) Každému zlomku zvlášť najděte odpovídající posloupnost jako v předchozím příkladu.

Příklad 3. Prozkoumejme důsledek zobecněné binomické věty:

- (a) Co se stane, když dosadíme $n = 2$? A $n = 3$?
- (b) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(0, 1 \cdot 2, 2 \cdot 4, 3 \cdot 8, \dots, k \cdot 2^k, \dots)$?
- (c) (bonus) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 8, 27, 64, \dots, k^3, \dots)$?

Příklad 4. Určete pomocí vytvořujících funkcí koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. (Vyjádřete ho ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q nebo přímo vyčíslete.)

- (a) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,
- (b) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$,
- (c) (bonus) u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.

Příklad 5. (bonus) Pro dané přirozené číslo k sestrojte vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je rovno pravděpodobnosti, že při hodu k klasickými šestistěnnými kostkami padne v součtu n . Pomocí této funkce určete, jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne přesně 30.

Příklad 6. (bonus) Kolik je možností, jak si vybrat 70 kuliček z krabice, kde jich je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých?

Příklad 7. (bonus) Pomocí vytvořujících funkcí sečtěte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ a $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Příklad 8. (bonus) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $n \times k$ pomocí dlaždic 1×2 ?

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #2 – Vytvořující funkce podruhé

Cvičící: Eliška Červenková

15. 10. 2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Vytvořující funkce

Opakování: Mocninná řada je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná.

Vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Například funkce $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$.

Zobecněná binomická věta: Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots,$$

kde $\binom{r}{0} = 1$ a $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Důsledek: Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

Příklad 1. (Příklady označené * jsou z minulého cvičení) Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru, tj. bez sumy):

- (a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
- (b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,
- (c) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.
- (d) $(1, 4, 9, 16, \dots)$.
- (e) $(1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, \dots)$,

Vzorec pro n -tý člen

Příklad 2. (Příklady označené * jsou z minulého cvičení) Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností:

- (a) $a_0 = 2, a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.
- (b) $a_0 = 3, a_1 = 5$ a $a_{n+1} = 3a_n - 4$ pro $n \geq 0$.
- (c) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$
- (d) $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + n + 1$
- (e) $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2^{n+1}$
- (f) $a_0 = 1, a_1 = 4, a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$
- (g) $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 1 + \sum_{k=0}^n a_k$
- (h) $a_0 = 2, a_1 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ pro $n \geq 0$
- (i) $a_0 = 1, a_1 = 9$ a $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ pro $n \geq 0$.

Recept:

- (i) Označte $F(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, a_3 \dots)$.
- (ii) Napište podobně posloupnosti, které mají vytvořující funkce $xF(x)$ a $x^2F(x)$.
- (iii) Přičtěte k $F(x)$ vhodné násobky $xF(x)$ a $x^2F(x)$, aby se skoro vše vynulovalo.
- (iv) Vyjádřete $F(x)$ (vyjde zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynomy v x).
- (v) Najděte kořeny jmenovatele a rozložte na parciální zlomky
- (vi) Každému zlomku zvlášť najděte odpovídající posloupnost jako v předchozím příkladu.

Příklad 3. Prozkoumejme důsledek zobecněné binomické věty:

- (a) Co se stane, když dosadíme $n = 2$? A $n = 3$?
- (b) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(0, 1 \cdot 2, 2 \cdot 4, 3 \cdot 8, \dots, k \cdot 2^k, \dots)$?
- (c) (bonus) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(1, 8, 27, 64, \dots, k^3, \dots)$?

Příklad 4. Určete pomocí vytvořujících funkcí koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech. (Vyjádřete ho ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q nebo přímo vyčíslete.)

- (a) u x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$,
- (b) u x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$,
- (c) (bonus) u x^5 ve výrazu $\frac{1}{(1-2x)^2}$.

Příklad 5. (bonus) Pro dané přirozené číslo k sestrojte vytvořující funkci $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde a_n je rovno pravděpodobnosti, že při hodu k klasickými šestistěnnými kostkami padne v součtu n . Pomocí této funkce určete, jaká je pravděpodobnost, že při hodu 12 kostkami padne přesně 30.

Příklad 6. (bonus) Kolik je možností, jak si vybrat 70 kuliček z krabice, kde jich je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých?

Příklad 7. (bonus) Pomocí vytvořujících funkcí sečtěte $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ a $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Příklad 8. (bonus) Kolika způsoby je možné vydláždit obdélník o rozměrech $n \times k$ pomocí dlaždic 1×2 ?