

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #2 – Vytvořující funkce

Cvičící: Eliška Červenková

8.10.2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Mocninné řady

Opakování: *Mocninná řada* je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná.

Pro libovolné $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Tvrzení: Bud' $(a_0, a_1, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že

$$|a_n| \leq K^n \quad \text{pro všechna } n.$$

Potom:

- (a) Řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ stejnoměrně a absolutně konverguje na intervalu $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu.
- (b) Navíc derivace a neurčitý integrál se dají počítat „člen po členu“.
- (c) Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \dots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 1. Pro velmi malé kladné x sečtěte (tj. vyjádřete bez sumy a bez tří teček):

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- (e) (bonus) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \dots$

Příklad 2. Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})$

Hint: Zkuste dosadit malé hodnoty za k a pak použijte indukci.

Vytvořující funkce

Opakování: Jako (*obyčejnou*) *vytvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Například vytvořující funkce posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ je $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Příklad 3. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzliny - vanilkovou, čokoládovou a jahodovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři jahodové kopečky.

Příklad 4. Předpokládejme, že posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ má vytvořující funkci $f(x)$.

- (a) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, \dots)$?
- (b) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, \dots)$?
- (c) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(-x)$?
- (d) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(\alpha x)$?
- (e) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $\alpha f(x)$?
- (f) (bonus) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f'(x)$?
- (g) (bonus) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$?

Příklad 5. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

- (a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
- (b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,
- (c) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.
- (d) $(1, 4, 9, 16, \dots)$.

Vzorec pro n -tý člen

Příklad 6. Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností:

- (a) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.
- (b) $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ a $a_{n+1} = 3a_n - 4$ pro $n \geq 0$.

Recept:

- (i) Označte $F(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$.
- (ii) Napište podobně posloupnosti, které mají vytvořující funkce $xF(x)$ a $x^2F(x)$.
- (iii) Přičtěte k $F(x)$ vhodné násobky $xF(x)$ a $x^2F(x)$, aby se skoro vše vynulovalo.
- (iv) Vyjádřete $F(x)$ (vyjde zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynomy v x).
- (v) Najděte kořeny jmenovatele a rozložte na parciální zlomky
- (vi) Každému zlomku zvlášť najděte odpovídající posloupnost jako v předchozím příkladu.

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #2 – Vytvořující funkce

Cvičící: Eliška Červenková

8.10.2025

Pokud něčemu nerozumíte, nebojte se zeptat. Je zbytečné se trápit se špatně pochopeným příkladem ;)

Mocninné řady

Opakování: *Mocninná řada* je řada tvaru $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, kde $a_i \in \mathbb{R}$ a x je reálná proměnná.

Pro libovolné $x \in (-1, 1)$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Tvrzení: Bud' $(a_0, a_1, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Nechť existuje K takové, že

$$|a_n| \leq K^n \quad \text{pro všechna } n.$$

Potom:

- (a) Řada $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ stejnoměrně a absolutně konverguje na intervalu $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ a hodnota jejího součtu definuje funkci $a(x)$ proměnné x na uvedeném intervalu.
- (b) Navíc derivace a neurčitý integrál se dají počítat „člen po členu“.
- (c) Hodnotami $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy $a_0, a_1, \dots$ jednoznačně určeny, $a(x)$ má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

Příklad 1. Pro velmi malé kladné x sečtěte (tj. vyjádřete bez sumy a bez tří teček):

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$
- (b) $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 + \dots$
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$
- (e) (bonus) $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^5}{32} - \frac{x^6}{64} + \dots$

Příklad 2. Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k})$

Hint: Zkuste dosadit malé hodnoty za k a pak použijte indukci.

Vytvořující funkce

Opakování: Jako (*obyčejnou*) *vytvvořující funkci* posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ označíme mocninnou řadu $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Například vytvořující funkce posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ je $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Příklad 3. Ve zmrzlinářství prodávají 3 druhy zmrzliny - vanilkovou, čokoládovou a jahodovou. Kolika způsoby si můžete nechat naložit 12 kopečků, pokud od každého druhu chcete alespoň dva kopečky, ale zároveň chcete maximálně tři jahodové kopečky.

Příklad 4. Předpokládejme, že posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ má vytvořující funkci $f(x)$.

- (a) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, \dots)$?
- (b) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, \dots)$?
- (c) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(-x)$?
- (d) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f(\alpha x)$?
- (e) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $\alpha f(x)$?
- (f) (bonus) Jaká posloupnost má vytvořující funkci $f'(x)$?
- (g) (bonus) Jakou vytvořující funkci má posloupnost $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots)$?

Příklad 5. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

- (a) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots)$,
- (b) $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$,
- (c) $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$.
- (d) $(1, 4, 9, 16, \dots)$.

Vzorec pro n -tý člen

Příklad 6. Najděte vzorec pro n -tý člen následujících rekurentně zadaných posloupností:

- (a) $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ pro $n \geq 0$.
- (b) $a_0 = 3$, $a_1 = 5$ a $a_{n+1} = 3a_n - 4$ pro $n \geq 0$.

Recept:

- (i) Označte $F(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$.
- (ii) Napište podobně posloupnosti, které mají vytvořující funkce $xF(x)$ a $x^2F(x)$.
- (iii) Přičtěte k $F(x)$ vhodné násobky $xF(x)$ a $x^2F(x)$, aby se skoro vše vynulovalo.
- (iv) Vyjádřete $F(x)$ (vyjde zlomek, který má v čitateli i jmenovateli polynomy v x).
- (v) Najděte kořeny jmenovatele a rozložte na parciální zlomky
- (vi) Každému zlomku zvlášť najděte odpovídající posloupnost jako v předchozím příkladu.