

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #5 – Konečné projektivní roviny & Latinské čtverce

Cvičící: Eliška Červenková

29. 10. 2025

Řešení

Příklad 1. $B_7 = \{0, 1\}^7$... množina binárních stringů délky 7.

- (a) Vezmeme Fanovu rovinu. Body představují souřadnice $1, \dots, 7$ a pro každou přímku ℓ vezmeme její charakteristický vektor $x^\ell = (x_1^\ell, \dots, x_7^\ell) \in \{0, 1\}^7$, kde $x_j^\ell = 1$ právě tehdy, když bod j leží na přímce ℓ . Nechť F je množina těchto sedmi vektorů. Označme váhu $\text{wt} = \sum_{i=1}^7 x_i$ (tj. počet jedniček). Pak má $x \in F$ váhu 3. Pro dvě různé přímky $\ell_1 \neq \ell_2$ mají vektory právě jednu společnou jedničku, tj. $\langle x^{\ell_1}, x^{\ell_2} \rangle = 1$, kde skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je v $\mathbb{Z}$.

Hammingova vzdálenost dvou binárních vektorů lze vyjádřit pomocí váhy a průniku:

$$d(u, v) = \text{wt}(u) + \text{wt}(v) - 2\langle u, v \rangle.$$

Pro $x \neq y \in F$ dostaneme tedy $d(x, y) = 3 + 3 - 2 \cdot 1 = 4$. (neboli liší se na těch čtyřech nesdílených jedničkách).

- (b) Označíme $\bar{x}$ bitový doplněk x (na každé pozici opačný symbol). Pak platí $d(x, \bar{x}) = 7$.

Dále pro libovolné $x, y \in B_7$ platí $d(x, \bar{y}) = 7 - d(x, y) = 7 - 4 = 3$, protože $\bar{y}$ má v každé pozici opačný bit než y , tedy pozic, kde se x liší od $\bar{y}$, je právě počet pozic, kde x se rovná y , tedy $7 - d(x, y)$.

- (c) Vezmeme $M = F \cup \bar{F} \cup \{0^7, 1^7\}$, kde 0^7 je string všech nul a 1^7 string všech jedniček. Celkem $|M| = 7 + 7 + 2 = 16$. Ověříme pro všechny.

Příklad 2. Mějme množinu $D = \{1, 2, \dots, 9\}$ a kolekci S jejích trojprvkových podmnožin (bloků), přičemž každé dvě podmnožiny mají nejvýše jeden společný prvek.

- (a) Každý prvek náleží nejvýše čtyřem podmnožinám: Uvažujme pevný prvek $x \in D$. Každá podmnožina z S , která obsahuje x , obsahuje kromě něj ještě dva různé prvky z $D \setminus \{x\}$. Ke každé takové podmnožině přiřadíme dvojici těchto dvou prvků. Dvě různé podmnožiny obsahující x se však nesmí shodovat ve více než jednom dalším prvku — tedy tyto dvojice musí být *navzájem disjunktní*. Množina $D \setminus \{x\}$ má 8 prvků, a z nich lze utvořit nejvýše $\lfloor 8/2 \rfloor = 4$ disjunktních dvojic.
- (b) Maximální počet podmnožin: Označme $b = |S|$ počet podmnožin a r_x počet podmnožin, které obsahují daný prvek x . Podle části (a) máme $r_x \leq 4$ pro všechna x . Počet všech "párů (bod, blok)", tj. bod náleží bloku, spočteme dvěma způsoby (vlevo vyberu nejprve bod a k němu počítám bloky, vpravo vyberu blok a k němu počítám body):

$$\sum_{x \in D} r_x = \sum_{Y \in S} 3 = 3b.$$

Z omezení $r_x \leq 4$ tedy plyne

$$3b = \sum_{x \in D} r_x \leq 9 \cdot 4 = 36 \quad \Rightarrow \quad b \leq 12.$$

(c) Například takto:

$$\begin{array}{lll} \{1, 2, 3\}, & \{4, 5, 6\}, & \{7, 8, 9\}, \\ \{1, 4, 7\}, & \{2, 5, 8\}, & \{3, 6, 9\}, \\ \{1, 5, 9\}, & \{2, 6, 7\}, & \{3, 4, 8\}, \\ \{1, 6, 8\}, & \{2, 4, 9\}, & \{3, 5, 7\}. \end{array}$$

Příklad 3. Pokud aplikujeme na oba čtverce tu samou permutaci řádků (tj. pro každé i, j nahradíme (a_{ij}, b_{ij}) párem $(a_{\pi(i),j}, b_{\pi(i),j})$), pak se páry (a_{ij}, b_{ij}) pouze přeuspořádají — žádný pár se nevytvoří dvakrát ani nezmizí. Stejně tak při aplikaci stejné permutace sloupců na oba čtverce. Pokud aplikujeme permutace řádků (resp. sloupců) jen v jednom z čtverců, pak ortogonalita nemusí být zachována. Konkrétní protipříklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Všechny hodnoty $1, 2, \dots, n^2$ se v C objeví právě jednou:

Nechť $c_{i_1, j_1} = c_{i_2, j_2}$. Pak

$$\begin{aligned} na_{i_1, j_1} + b_{i_1, j_1} + 1 &= na_{i_2, j_2} + b_{i_2, j_2} + 1, \\ n(a_{i_1, j_1} - a_{i_2, j_2}) &= b_{i_2, j_2} - b_{i_1, j_1}. \end{aligned}$$

Protože $b_{i_1, j_1}, b_{i_2, j_2} \in \{0, \dots, n-1\}$, je pravá strana v rozmezí $\{-(n-1), \dots, n-1\}$. Levá strana je násobek n ; z toho plyne, že obě strany musí být nulové. Tedy $a_{i_1, j_1} = a_{i_2, j_2}$ a $b_{i_1, j_1} = b_{i_2, j_2}$, což ale vylučuje ortogonalita. Nejmenší možná hodnota $c_{i,j}$ je při $a = b = 0$, tedy 1. Největší je při $a = b = n-1$, tedy $n(n-1) + (n-1) + 1 = n^2$. Máme n^2 polí, v nich n^2 různých hodnot z intervalu $\{1, \dots, n^2\}$, takže přesně jednou se objeví každé číslo $1, 2, \dots, n^2$.

Spočítáme součet i -tého řádku:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = \sum_{j=1}^n (na_{i,j} + b_{i,j} + 1) = n \sum_{j=1}^n a_{i,j} + \sum_{j=1}^n b_{i,j} + n.$$

Protože A a B jsou latinské čtverce na symbolech $\{0, \dots, n-1\}$, v každém řádku každého z nich se objeví každé číslo $0, \dots, n-1$ právě jednou. Tedy

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dosazením dostaneme

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Součet každého sloupce je stejný.