

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #4 – Vytvořující funkce

Cvičící: Eliška Červenková

22. 10. 2025

Řešení

- Příklad 1.** (a) C_n (K první závorce "(" umístíme její ")" do páru na pozici $i \leq 2n$ tak, aby byl počáteční úsek délky i korektně uzávorkován - tj. obsahuje stejný počet "(" a ")" a pro každou pozici $j < i$ platí, že počáteční úsek délky $< j$ obsahuje alespoň tolik "(" jako ")". Tím se posloupnost $2n$ závorek rozdělí na dvě kratší. Sečteme přes všechny možnosti pozice ")", kterých je n - nemůže se nacházet na lichých pozicích, protože pak by počáteční úsek byl tvořen lichým počtem závorek, což není korektní uspořádání.)
- (b) C_n (Uzávorkování reprezentujeme jako cestu délky $2n$ v mřížce, krok nahoru odpovídá "(", krok vpravo odpovídá ")". Pokud klesneme pod diagonálu, máme v počátečním úseku více uzavíracích závorek než otevíracích, což není korektní uzávorkování)
- (c) C_n (Každý schod náleží právě jednomu obdélníku. Pak tedy dolní levý roh celého schodiště náleží právě jednomu obdélníku příslušnému nějakému schodu. Uvažme dolní levý roh celého schodiště a nějaký konkrétní schod. Pokud tyto dva rohy náleží jednomu obdélníku, rozdělíme tím schodiště na dvě menší schodiště. Sečteme přes všechny možnosti výběru schodu)
- (d) C_{n-2} (Zafixujeme jednu stranu, k ní vybíráme jeden z $n-2$ vrcholů - tím dostaneme jeden trojúhelník, který rozdělí n -úhelník na 2 menší mnohoúhelníky a příslušný trojúhelník. Sečteme přes všechny možnosti.)
- (e) C_n (Každé z čísel $1, \dots, n$ je buď v horním nebo dolním řádku tabulky. Vytvoříme slovo délky $2n$ z "(" a ")" tak, že na k -tou pozici napíšeme "(", pokud je k v horním řádku, nebo ")", pokud je k ve spodním řádku. Dostaneme korektní uzávorkování, protože pro každou ")" v našem slově existuje právě jedna "(" do páru nacházející se na některé z pozic $< k$, protože ve sloupcích tabulky čísla rostou.)

Příklad 2. Fanova rovina (body = trpaslíci, přímky = dny v týdnu, bod náleží přímce = trpaslík je doma)

Příklad 3. Graf incidence (body–přímky) je bipartitní $\iff$ neobsahuje liché cykly. Kdyby obsahoval C_4 , pak by existovaly 2 body náležející dvěma přímkám.

Příklad 4. (a) Nechť vybereme t přímek. Speciálně počet uspořádaných dvojic (bod, přímka) je $t(n+1)$, abychom pokryli všechny body, je třeba

$$t(n+1) \geq |X| = n^2 + n + 1 \quad \Rightarrow \quad t \geq n + \frac{1}{n+1} \geq n+1.$$

Na druhou stranu výběrem $n+1$ přímek procházejících jedním konkrétním bodem pokryjeme celou rovinu.

(b) Obdobně pro výběr s bodů: počet uspořádaných dvojic (bod, přímka) je $s(n+1)$, abychom pokryli všechny přímky, je třeba

$$s(n+1) \geq |X| = n^2 + n + 1 \quad \Rightarrow \quad s \geq n + \frac{1}{n+1} \geq n+1.$$

Na druhou stranu výběrem $n+1$ bodů náležejících jedné konkrétní přímce pokryjeme celou rovinu. (nebo jednodušší odůvodnění přes dualitu - záměna bodů za přímky a obráceně, ale to jste prý na přednášce neměli)

Příklad 5. $(A3) \iff (A3')$

" $\Rightarrow$ " Nechť $F = \{A, B, C, D\}$ jsou čtyři body v obecné poloze. Přímky AB a CD se kvůli (A1) protínají v dalším bodě (označíme E) - AB a CD jsou hledané přímky

" $\Leftarrow$ " Mějme přímky p, q , každou s alespoň 3 body (tedy nechť se protínají v bodě E (A1) a krom toho jedna obsahuje body A, B a druhá C, D). Pak A, B, C, D jsou 4 body v konvexní poloze (kdyby v konvexní poloze nebyly, pak leží všechny 3 na jedné přímce p' , a tedy $|p' \cap q| \geq 2$ pro $q = AB$ nebo $q = CD$)

Příklad 6. (a) Z Příkladu 3. víme, že incidenční graf konečně projektivní roviny neobsahuje C_4 . Označme A množinu bodů a B množinu přímek roviny (tj. vrcholy incidenčního grafu G).

Pak $n := |V_G| = |A| + |B| = 2(k^2 + k + 1)$. Každý bod má stupeň $k + 1$, tedy $|E_G| = (k + 1)(k^2 + k + 1)$. Jelikož $(k + 1)^2 > k^2 + k + 1$, tak

$$|E_G|^2 = (k^2 + k + 1)^2(k + 1)^2 > (k^2 + k + 1)^3 = \left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

což odpovídá tomu, že G má $\Omega(|V_G|^{3/2})$ hran.

(b) Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech, který neobsahuje čtyřcyklus C_4 . Označme stupně vrcholů $d_1, d_2, \dots, d_n$ a definujme množinu $S = \{(u, \{v, w\}) : v \neq w \text{ a } u \text{ je sousedem obou } v, w\}$. Každý vrchol u má d_u sousedů, takže lze zvolit $\binom{d_u}{2}$ dvojic sousedů vrcholu u . Odtud

$$|S| = \sum_{u=1}^n \binom{d_u}{2} = \sum_{u=1}^n \frac{d_u(d_u - 1)}{2}.$$

Protože graf neobsahuje čtyřcyklus, žádná dvojice $\{v, w\}$ nemůže mít dva různé společné sousedy. Každá dvojice $\{v, w\}$ se tedy může objevit v S nejvýše jednou, a proto $|S| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dohromady:

$$\sum_{u=1}^n \frac{d_u(d_u - 1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{u=1}^n d_u(d_u - 1) \leq n(n-1),$$

a tedy $\sum_{u=1}^n d_u^2 \leq \sum_{u=1}^n d_u + n(n-1)$. Zároveň víme, že $\sum_{u=1}^n d_u = 2|E|$.

Použijeme Cauchy-Schwarzovu nerovnost $(\sum_{u=1}^n d_u)^2 \leq n \sum_{u=1}^n d_u^2$, pak po dosazení

$$(2|E|)^2 \leq n \sum_{u=1}^n d_u^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{u=1}^n d_u^2 \geq \frac{4|E|^2}{n}.$$

Celkem dostaneme $\frac{4|E|^2}{n} \leq 2|E| + n(n-1)$, a po úpravě $4|E|^2 - 2n|E| - n^2(n-1) \leq 0$. Řešením této kvadratické nerovnice dostáváme

$$|E| \leq \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3}).$$