

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #3 – Vytvořující funkce

Cvičící: Eliška Červenková

15. 10. 2025

Řešení

Příklad 1. (a) $\frac{x^2}{1-x}$,

(b) $\frac{1}{1-3x}$,

(c) $\frac{1+x}{1-2x^2}$.

(d) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$. (dvakrát zderivujte)

(e) $\frac{1}{1-2x^2}$,

Příklad 2. (a)

$$a_0 = 2,$$

$$a_1 = 5,$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$

Z poslední rovnice vidíme, že platí

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad (*).$$

Označme hledanou funkci $F(x)$. Chceme vytvořit soustavu rovnic (zde zapsanou pouze pomocí koeficientů) tak, aby se po jejich sečtení vynulovalo co nejvíc prvků

$F(x)$	...	$(a_0,$	$a_1,$	$a_2,$	...	$a_{n+2},$	...
$-5xF(x)$	...	$(0,$	$-5a_0,$	$-5a_1,$	...	$-5a_{n+1},$	...
$6x^2F(x)$	...	$(0,$	$0,$	$6a_0,$	...	$6a_n,$	...

V rámečku vidíme, že pro $n \geq 3$ dostaneme po sečtení přesně (*). Rozepíšeme posloupnosti do funkcí a sečteme:

$$F(x) - 5xF(x) + 6x^2F(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x.$$

Dosadíme a upravíme

$$F(x) - 5xF(x) + 6x^2F(x) = 2 + (5 - 5 \cdot 2)x$$

$$F(x)(1 - 5x + 6x^2) = 2 - 5x$$

$$F(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 5x + 6x^2}$$

Rozložíme na parciální zlomky:

$$F(x) = \frac{2 - 5x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{2 - 5x}{(1 - 2x)(1 - 3x)} = \frac{A}{1 - 2x} + \frac{B}{1 - 3x} = \frac{A(1 - 3x) + B(1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 3x)}$$

Pro čitatel musí platit

$$A(1 - 3x) + B(1 - 2x) = 2 - 5x,$$

tedy se musí rovnat členy s x a bez x . Dostaneme soustavu rovnic:

$$A + B = 2,$$

$$-3A - 2B = -5$$

A po vyřešení

$$A = 1, \quad B = 1,$$

Dostali jsme tak

$$F(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x},$$

což jsou součty známých řad:

$$F(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{m=0}^{\infty} (2x)^m + \sum_{m=0}^{\infty} (3x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (2^m + 3^m)x^m$$

a hledaný koeficient je tedy

$$a_n = 2^n + 3^n$$

- (b) $3^n + 2$
- (c) $\frac{2}{3}(1 - (\frac{-1}{2})^n)$
- (d) $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ (přičtěte $\frac{-1}{(1-x)^2} \dots (-1, -2, -3, \dots)$)
- (e) $3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n$ (přičtěte $\frac{-1}{1-2x} \dots (-1, -2, -2^2, \dots)$)
- (f) $(n+1)2^n$
- (g) Fibonacci (přičtěte $\frac{1}{1-x}F(x)$ a $\frac{1}{1-x}$)
- (h) $2^n + (-1)^n$
- (i) $(2n+1)3^n$

Příklad 3. (a) porovnejte derivaci a rozvoj podle zobecněné binomické věty

- (b) $\frac{2x}{(1-2x)^2}$ (substituce $y = 2x$ + derivace)
- (c) $\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$ ($3 \times$ zderivujte)

Příklad 4. (a) $(x^2 + x^3 + \dots)^4 = (x^2(1 + x + \dots))^4 = x^8(1 + x + \dots)^4 = x^8 \cdot \frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n$,
koeficient u x^{15} odpovídá koeficientu u x^7 v sumě, řešení je tedy $\binom{10}{3}$

- (b) $\binom{16}{5}$
- (c) 192

Příklad 5.

Příklad 6. tj. koeficient u x^{70} pro $C(x) \cdot M(x) \cdot B(x)$

$$C(x) = 1 + x + \dots + x^{30}, \quad M(x) = 1 + x + \dots + x^{40}, \quad B(x) = 1 + x + \dots + x^{50}$$
$$C(x)M(x)B(x) = \frac{(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})}{(1-x)^3} = (1+x^{72}+x^{82}+x^{92}-x^{31}-x^{41}-x^{51}-x^{123}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

Zajímá nás člen u x^{70} : $\frac{72 \cdot 71 - 40 \cdot 41 - 30 \cdot 31 - 20 \cdot 21}{2} = 1061$

Příklad 7. • Označme $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ Máme:

$$a_k = \binom{n}{k}, \quad b_{n-k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \Rightarrow C(x) = A(x)B(x)$$

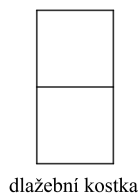
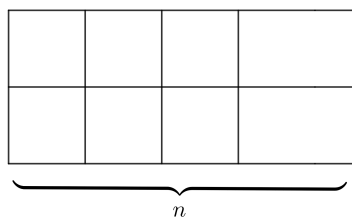
Vytvořující fce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je $A(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$. Pak

$$C(x) = A(x)B(x) = (1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} x^k$$

Zajímá nás koeficient u x^n , tedy $c_n = \binom{2n}{n}$

$$\bullet \quad k \binom{n}{k} = \frac{k n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n(1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \quad (\text{Záměna: } j = k - 1)$$

Příklad 8.



dlažební kostka

Chodník $n \times 2$ lze dláždit jako

chodník $(n-1) \times 2$ +  nebo

$(n-2) \times 2$ + . Dostaneme

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, kde $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$
(dvě svisle nebo dvě vodorovně)

Přes rekurenci nám vyjde Fibonacciho posloupnost.