

Kombinatorika a grafy 1

Cvičení #2 – Vytvořující funkce

Cvičící: Eliška Červenková

8.10.2025

pozn: používám značení $f(x) = \sum a_n x^n$, $g(x) = \sum b_n x^n$, $h(x) = \sum c_n x^n$

Řešení

- Příklad 1.** (a) $\frac{x}{1-x}$ protože $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = (\sum_{k=0}^{\infty} x^k) - 1 = \frac{x}{1-x}$ pro $|x| < 1$
(b) $\frac{1}{1-2x}$ protože $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = \frac{1}{1-2x}$ pro $|x| < \frac{1}{2}$ (neboli vezmeme substituci $y = 2x$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} (y)^k = \frac{1}{1-y}$ a zpětně dosadíme)
(c) $\frac{1}{1+2x}$ protože $\sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^k = \frac{1}{1+2x}$ pro $|x| < \frac{1}{2}$
(d) $\frac{x^2}{1-x^2}$ protože $\sum_{k=1}^{\infty} (x^2)^k = (\sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k) - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$ pro $|x| < 1$
(e) $x \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{x^3-8}$ protože substituce $y = \frac{x}{2}$, tj. $x = 2y$, pak se jedná o sumu $\sum_{k=0}^{\infty} s_k y^k$, kde $s_k = 1$ pro $k \equiv 1, 2 \pmod{3}$ a $s_k = -1$ pro $k \equiv 0 \pmod{3}$. Řada je tedy tvaru
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (y^{3\ell+1} + y^{3\ell+2} - y^{3\ell+3}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} y^{3\ell} (y^1 + y^2 - y^3) = (y^1 + y^2 - y^3) \sum_{\ell=0}^{\infty} y^{3\ell} = (y^1 + y^2 - y^3) \frac{1}{1-y^3} =$$
$$= \frac{x(4+2x-x^2)}{8-x^3}$$

Příklad 2. Vyzkoušíme pro malé hodnoty k :

$$(1+x)(1+x^2) = 1+x+x^2+x^3$$
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = 1+x+x^2+\dots+x^7$$

Odtud indukci ukážeme, že

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k}) = 1+x+x^2+\dots+x^{2^{k+1}-1}.$$

Pro $k=0$ a $k=1$ už máme spočteno, dokážeme $k-1 \rightarrow k$:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^k}) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^{k-1}})(1+x^{2^k}) =$$
$$= (1+x+x^2+\dots+x^{2^k-1})(1+x^{2^k}) = (1+x+x^2+\dots+x^{2^k-1}) + x^{2^k}(1+x+x^2+\dots+x^{2^k-1})$$
$$= 1+x+x^2+\dots+x^{2^{k+1}-1}.$$

Na výsledný součet použijeme vzorec pro součet konečné geometrické řady.

$$\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x}$$

Příklad 3. Potřebujeme rozdělit 12 kopečků mezi:

$$V + C + J = 12,$$

kde platí omezení $V \geq 2$, $C \geq 2$, $2 \leq J \leq 3$. Pro každý druh zmrzliny sestavíme mocninovou řadu, kde člen x^k značí, že jsme si vzali právě k kopečků daného druhu. Koeficient u x^k říká, kolika způsoby to lze (zde vždy 1, protože kopečky jsou nerozlišitelné - je právě jeden způsob jak vybrat k kopečků). Součin těchto řad dává všechny kombinace dohromady. Koeficient u x^{12} pak odpovídá počtu rozdělení 12 kopečků.

- Vanilka: alespoň 2 kopečky $x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ (stačí brát i pouze $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$, protože každého druhu chceme alespoň dva kopečky, tedy celkem vybíráme vlastně jen 6 kopečků, jakákoliv vyšší mocnina nám při násobení s x^m z dalších řad dá větší exponent než 6, tedy nás nemusí zajímat)

- Čokoláda: totéž
- Jahoda: 2 nebo 3 kopečky: $x^2 + x^3 = x^2(1 + x)$.

$$(x^2 + x^3 + \dots)^2(x^2 + x^3) = \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)^2(x^2 + x^3) = \frac{x^6(1+x)}{(1-x)^2} \quad (!! \text{první suma začíná až od } x^2)$$

Vezmeme vytvořující funkci $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ a dostaneme:

$$\frac{x^6(1+x)}{(1-x)^2} = (x^6 + x^7) \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^{i+6} + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x^{j+7}$$

chceme vyjádřit koeficienty pro x^m , tedy $i+6 = m$ a $j+7 = m$, neboli $i+1 = m-5$ a $j+1 = m-6$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^{i+6} + \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)x^{j+7} = \sum_{m=6}^{\infty} (m-5)x^m + \sum_{m=7}^{\infty} (m-6)x^m = \\ = \sum_{m=6}^{\infty} (m-5)x^m + \sum_{m=6}^{\infty} (m-6)x^m = \sum_{m=6}^{\infty} (2m-11)x^m$$

Hledáme koeficient pro $m = 12$, tedy možných kombinací je 13.

(Každá příchuť má svou množinu povolených počtů kopečků, kterou zakódujeme do řady, kde x^k reprezentuje „vzít k kopečků“. Součin řad pak odpovídá všem kombinacím. Koeficient u x^{12} pak vybere kombinace, které dohromady dají právě 12 kopečků. Alternativně u malých exponentů lze počítat „ručně“ - když vyberu 2 jahodové, pak mám 7 možností jak vybrat vanilkové a čokoládové, když vyberu 3 jahodové, pak mám 6 možností jak vybrat vanilkové a čokoládové. Výhoda obecného tvaru je ta, že rovnou víme předpis pro libovolný celkový počet kopečků za stejných podmínek)

Příklad 4. (a) $xf(x)$

(b) $f(x^3)$

(c) $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)$

(d) $(\alpha^0 a_0, \alpha^1 a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^k a_k, \dots)$

(e) $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots, \alpha a_k, \dots)$

(f) $\sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1} \rightarrow (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$

(g) Označme $h(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\sum_i a_i x^i\right) \left(\sum_j b_j x^j\right)$, pak $c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j x^n$, příslušná posloupnost je $(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots)$ za $g(x)$ vezmeme $\frac{1}{1-x}$, pak $f(x)g(x)$ je vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \dots)$

(h) $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

Příklad 5. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a) $\frac{x^2}{1-x}$,

(b) $\frac{1}{1-3x}$,

(c) $\frac{1+x}{1-2x^2}$.

(d) $\frac{1}{(1-x)^3}$.

Příklad 6. (a) $a_n = 2^n + 3^n$

(b) $a_n = 3^n + 2$