# NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
# Handout No. 8

## Shannonova kapacita grafu
## 1. prosinec 2020

**Definice (úplný součin grafů):** Pro grafy $G, H$ definujeme jejich *úplný (silný) součin* jako graf

$$G \boxtimes H = (V(G) \times V(H), \{(a,b)(u,v) : (a = u \vee au \in E(G)) \wedge (b = v \vee bv \in E(H))\}).$$

Symbolem $G^n$ pak značíme $n$-tou úplnou mocninu grafu $G$.

**Scénář neomylného předávání informací:** Nechť graf $G$ vyjadřuje *zaměnitelnost* symbolů v abecedě použité pro předávání informací. Chceme-li předávat symboly tak, aby nemohlo dojít k záměně, můžeme použít nejvýše $\alpha(G)$ symbolů. Budeme-li však posílat symboly po dvojicích, tedy slova délky 2, pak nezaměnitelných slov je $\alpha(G^2)$, což pro některé grafy může být více, než $\alpha^2(G)$. Např. $\alpha(C_5^2) = 5 > \alpha^2(C_5) = 4$. Optimalizaci úspornosti předávání informací pomocí slov konstantní (ale větší) délky vyjadřuje následující definice.

**Definice (Shannonova kapacita grafu):** Pro graf $G$ definujeme jeho *Shannonovu kapacitu* $\Theta(G)$ následovně

$$\Theta(G) = \sup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha(G^n)}.$$

**Poznámka:** Shannonova kapacita je stále velmi neprobádaný koncept. Není jasné, jak těžké je určit Shannonovu kapacitu grafu z výpočetního hlediska. Ale je jisté, že to je obtížná otázka, neboť pro většinu konkrétních grafů se Shannonova kapacita vůbec neumí určit. V roce 1979 maďarský matematik László Lovász překvapil přesným určením Shannonovy kapacity pěticyklu, což byl do té doby otevřený problém. Důkaz je založen na pojmu *ortonormální reprezentace* grafu, který Lovász zavedl. László Lovász obdržel čestný doktorát Univerzity Karlovy v roce 2020.

**Pozorování:** Pro každý graf $G$ je

$$\Theta(G) \geq \alpha(G).$$

**Pozorování:** Je-li $\chi(-G) = \alpha(G)$ (tedy speciálně, je-li $G$ perfektní graf), je

$$\Theta(G) = \alpha(G).$$

**Definice (ortonormální reprezentace a její velikost):** *Ortonormální reprezentace* grafu $G$ je zobrazení $f : V(G) \longrightarrow R^d$ takové, že

- $\| f(u) \| = 1$ pro každý vrchol $u \in V(G)$, a
- $\langle f(u), f(v) \rangle = 0$ kdykoliv $u \neq v$ a $uv \notin E(G)$.

*Velikost* reprezentace $f$ je definována jako

$$\| f \| = \inf_{c:\|c\|=1} \max_{u \in V(G)} \frac{1}{\langle c, f(u) \rangle^2}.$$

**Definice (Lovászova dzeta funkce):** *Lovászova dzeta funkce* grafu $G$ je definována jako

$$\vartheta(G) = \inf_f \| f \|,$$

přičemž infimum se bere přes všechny ortonormální reprezentace $f$ grafu $G$.

**Poznámky:** Infimum v definici velikosti ortonormální reprezentace se nabývá, protože funkce $\max_{u \in V(G)} \frac{1}{\langle c, f(u) \rangle^2}$ jako funkce $c$ je spojitá a zdola omezená na svém definičním oboru. Vektor $c$, pro který se tohoto minima nabývá, se nazývá *rukojeť* reprezentace $f$.
V definici Lovászovy dzeta funkce stačí uvažovat omezenou dimenzi (např. $d \leq |V(G)|$).
Infima v definici Lovászovy dzeta funkce se též nabývá, protože funkce $\| f \|$ je spojitá funkce argumentu $f$. Je tedy ve skutečnosti

$$\vartheta(G) = \min_f \min_{c:\|c\|=1} \max_{u \in V(G)} \frac{1}{\langle c, f(u) \rangle^2}.$$

**Lemma 1:** Pro každý graf $G$ je $\alpha(G) \leq \vartheta(G)$.

**Důkaz:** Nechť $f$ je optimální ortonormální reprezentace grafu $G$ a nechť $c$ je její rukojeť. Je-li $A \subseteq V(G)$ nezávislá množina velikosti $\alpha(G)$, pak vektory $f(u), u \in A$ jsou na sebe po dvou kolmé a lze je doplnit na ortonormální bázi $\mathcal{B}$. Pak platí

$$c = \sum_{v \in \mathcal{B}} \langle c, v \rangle \cdot v$$

a proto

$$1 = \langle c, c \rangle = \sum_{v \in \mathcal{B}} \langle c, v \rangle^2 \geq \sum_{u \in A} \langle c, f(u) \rangle^2 \geq \frac{\alpha(G)}{\vartheta(G)}$$

protože

$$\vartheta(G) = \| f \| \geq \frac{1}{\langle c, f(u)\rangle^2}$$

pro každý vrchol $u \in V(G)$.

**Lemma 2:** Pro každé dva grafy $G, H$ je $\vartheta(G \boxtimes H) \leq \vartheta(G) \cdot \vartheta(H)$.

**Důkaz:** Nechť $f$ je optimální ortonormální reprezentace grafu $G$, a nechť $c$ je její rukojeť. Podobně nechť $g$ je optimální ortonormální reprezentace grafu $H$ s rukojetí $d$. Uvažme tenzorový součin $f \circ g$. Protože $\langle f(u) \circ g(v), f(u') \circ g(v')\rangle = \langle f(u), f(u')\rangle \cdot \langle g(v), g(v')\rangle$, je $f \circ g$ ortonormální reprezentace součinu $G \boxtimes H$. Pro jeden konkrétní vektor $c \circ d$ (jako kandidáta na její rukojeť) pak platí

$$\vartheta(G \boxtimes H) \leq \max_{u \in V(G), v \in V(H)} \frac{1}{\langle c \circ d, f(u) \circ f(v)\rangle^2} = \max_{u \in V(G), v \in V(H)} \frac{1}{\langle c, u\rangle^2 \cdot \langle d, v\rangle^2} \leq$$

$$\leq \max_{u \in V(G)} \frac{1}{\langle c, u\rangle^2} \cdot \max_{v \in V(H)} \frac{1}{\langle d, v\rangle^2} = \vartheta(G) \cdot \vartheta(H).$$

**Důsledek:** Pro každý graf $G$ a pro každé přirozené číslo $k$ je $\vartheta(G^k) \leq \vartheta^k(G)$.

**Lemma 3:** Pro každý graf $G$ je $\Theta(G) \leq \vartheta(G)$.

**Důkaz:** Pro každý graf $G$ platí

$$\Theta(G) = \sup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)} \leq \sup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\vartheta(G^k)} \leq \sup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\vartheta^k(G)} \leq = \vartheta(G).$$

**Věta:** $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$.

**Důkaz:** Protože $\alpha(C_5^2) = 5$, je $\Theta(C_5) \geq \sqrt{5}$.
Ukážeme, že $\vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$, takže rovnost $\Theta(C_5) = \sqrt{5}$ vyplyne z řetězce nerovností

$$\sqrt{5} \leq \Theta(C_5) \leq \vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}.$$

K důkazu $\vartheta(C_5) \leq \sqrt{5}$ stačí najít šikovnou ortonormální reprezentaci v $R^3$ (Lovászův deštník).