NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 7

Spektrální teorie grafů III.
Aplikace proplétání vlastních čísel
24. listopad 2020

Věta 1: Nechť G je d-regulární graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\alpha(G) \leq n \cdot \frac{-\lambda_n}{d - \lambda_n}.$$

Důsledek: Nechť G je d-regulární graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_n|}.$$

Věta 2: Nechť G je graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\Delta(G) \geq \lambda_1 \geq deg_{avg}(G).$$

Věta 3: Nechť G je graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_1.$$

Věta 4: Nechť G je graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\alpha(G) \leq n \cdot \frac{-\lambda_1 \lambda_n}{\delta^2(G) - \lambda_1 \lambda_n}.$$

Věta 5: Nechť G je souvislý graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_n|}.$$

Další věty o proplétání vlastních čísel

Věta A: Nechť $A \in C^{n \times n}$ je Hermitovská matice a $S \in C^{m \times n}$, $m < n$, je matice taková, že $SS^* = E$. Potom vlastní čísla matice SAS^* proplétají vlastní čísla matice A.

Důkaz: Řádky matice S chápané jako vektory z C^n jsou ortonormální a lze je doplnit na ortonormální bázi celého prostoru C^n. Nechť T je matice, jejíž řádky jsou tyto doplňující vektory, a

$$R = \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}.$$

Potom $RR^* = E$ a

$$RAR^* = \begin{pmatrix} SAS^* & SAT^* \\ TAS^* & TAT^* \end{pmatrix}.$$

Tudíž SAS^* je hlavní podmatice matice RAR^* a vlastní čísla matice SAS^* proplétají vlastní čísla matice RAR^*. Přitom Sp $RAR^* =$ Sp A, protože tyto matice jsou podobné.

Věta B: Nechť

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

je Hermitovská matice v blokovém tvaru taková, že $A_{ij} \in C^{n_i \times n_j}$ pro čísla $n_1, n_2, \dots, n_m, \sum_{i=1}^m n_i = n$. Nechť $B \in C^{m \times m}$ je matice, jejíž prvky b_{ij} jsou průměrné řádkové součty bloků A_{ij}. Potom vlastní čísla matice B proplétají vlastní čísla matice A.

Důkaz: Nechť $\widetilde{S} \in \{0,1\}^{m \times n}$ je matice, jejíž i-tý řádek má $n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1}$ nul následovaných n_i jedničkami a zakončený $n_{i+1} + \ldots + n_m$ nulami. Potom $\widetilde{S}\widetilde{S}^T$ je diagonální matice D s prvky $n_1, n_2, \dots, n_m$ na hlavní diagonále a platí

$$B = D^{-1}\widetilde{S}A\widetilde{S}^T.$$

Položme $S = D^{-\frac{1}{2}}\widetilde{S}$. Protože S je reálná matice a $SS^* = SS^T = E$, vlastní čísla matice SAS^T proplétají vlastní čísla matice A. Přitom $SAS^T = D^{\frac{1}{2}}BD^{-\frac{1}{2}}$ a Sp $SAS^T =$ Sp B.

Důkazy vět o grafech

Důkaz Věty 1: Nechť A je matice sousednosti grafu G. Uvažme matici

$$C = A - \frac{1}{n}(d - \lambda_n)J.$$

Matice A a J komutují, a proto mají společnou ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů, přičemž vektor $\mathbf{1}$ ze samých jedniček je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu d matice

A, i vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu n matice J. Odtud odvodíme, že λ_n je nejmenší vlastní číslo matice C. Nechť $W \subseteq V(G)$ je nezávislá množina velikosti $\alpha = \alpha(G)$ v G a nechť $B = -\frac{1}{n}(d - \lambda_n)J$ je hlavní podmatice matice C určená řádky a sloupci z W. Nejmenší vlastní číslo matice B je $-\frac{\alpha}{n}(d - \lambda_n)$. Vzhledem k proplétání vlastních čísel je

$$-\frac{\alpha}{n}(d - \lambda_n) \geq \lambda_n,$$

odkud již dokazovaná nerovnost snadno plyne.

Důkaz Věty 2: Nechť $\Delta = \Delta(G)$. Doplňme G na Δ-regulární graf H tak, aby G byl jeho indukovaný podgraf. Pak vlastní čísla grafu G prolétají vlastní čísla grafu H. Přitom $\lambda_{max}(H) = \Delta$, a tedy $\Delta \geq \lambda_1$.

Druhá nerovnost plyne z Věty B, když matici sousednosti A grafu G chápeme jako blokovou matici s jedním blokem, tedy $m = 1$ a $n_1 = n$. Potom matice B je jednoprvková matice

$$B = (deg_{avg}G)$$

a její jediné vlastní číslo je $deg_{avg}G$. Nerovnost $\lambda_1 \geq deg_{avg}G$ pak plyne z Věty B o proplétání vlastních čísel.

Důkaz Věty 3: Nechť $\chi = \chi(G)$ a nechť H je χ-kritický indukovaný podgraf grafu G. Označme μ_1 největší vlastní číslo grafu H. Z Věty o proplétání vlastních čísel plyne $\lambda_1 \geq \mu_1$, z Věty 2 zase dostáváme $\mu_1 \geq deg_{avg}(H) \geq \delta(H) \geq \chi - 1$. Odtud již dokazované tvrzení přímo vyplývá.

Důkaz Věty 4: Nechť $W \subset V(G)$ je nezávislá množina velikosti $\alpha = \alpha(G)$. Představme si matici sousednosti A grafu G jako blokovou matici, kde prvních α řádků (sloupců) odpovídá vrcholům z W, přičemž $m = 2$ a $n_1 = \alpha, n_2 = n - \alpha$. Protože W je nezávislá množina, vypadá matice A takto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

a odpovídající matice B z Věty B nechť je

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Počet hran mezi W a $V(G) \setminus W$ je roven $n_1 \cdot b_{12} = n_2 \cdot b_{21}$, a tedy

$$b_{21} = b_{12} \cdot \frac{\alpha}{n - \alpha}.$$

Protože všichni sousedé vrcholů z W jsou z $V(G) \setminus W$, je

$$b_{12} \geq \delta(G).$$

Podle Věty B jsou vlastní čísla ν_1, ν_2 matice B reálná a proplétají vlastní čísla matice A, neboli

$$\lambda_1 \geq \nu_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_n,$$

odkud plyne

$$-\nu_1\nu_2 \leq -\lambda_1\lambda_n.$$

Podle Vietových vztahů je $\nu_1\nu_2 = \det B = -b_{12}b_{21}$. Po dosazení

$$\delta^2(G) \cdot \frac{\alpha}{n-\alpha} \leq b_{12}^2 \cdot \frac{\alpha}{n-\alpha} = b_{12}b_{21} = -\nu_1\nu_2 \leq -\lambda_1\lambda_n,$$

odkud po úpravě dostaneme dokazovanou nerovnost.

Důkaz Věty 5: Nechť $\chi = \chi(G)$ a nechť $W_1, W_2, \ldots, W_\chi$ je rozklad $V(G)$ na nezávislé množiny, tedy χ-obarvení grafu G. Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je reálný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 (nadále x chápeme jako sloupcový vektor, podle Frobeniovy věty lze x volit s nezápornými, a tudíž kladnými, souřadnicemi). Utvořme matici $\widetilde{S} \in R^{\chi \times n}$ takto

$$\widetilde{S}_{ij} = \begin{cases} x_j & \text{když } j \in W_i \\ 0 & \text{když } j \notin W_i \end{cases}.$$

Potom $D = \widetilde{S}\widetilde{S}^T$ je diagonální matice s kladnými prvky na hlavní diagonále. Položme $S = D^{-\frac{1}{2}}\widetilde{S}$.

1. Protože $SS^T = E$, podle Věty A vlastní čísla $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_\chi$ matice SAS^T proplétají vlastní čísla matice $A = A_G$.
2. Matice SAS^T má na hlavní diagonále samé nuly, a proto $\sum_{i=1}^{\chi} \nu_i = 0$.
3. Jelikož $D^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ je vlastní vektor matice SAS^T příslušný vlastnímu číslu λ_1, je $\lambda_1 \in \operatorname{Sp} SAS^T$. Protože vektor $D^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}$ má všechny souřadnice kladné, je λ_1 největší vlastní číslo matice SAS^T, a tedy $\nu_1 = \lambda_1$.
4. Z proplétání vlastních čísel plyne

$$\lambda_1 = \nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_\chi \geq \lambda_n.$$

5. Spojením výše uvedených nerovností dostaneme

$$-\lambda_1 = -\nu_1 = \sum_{i=2}^{\chi} \nu_i \geq (\chi - 1)\lambda_n$$

což po úpravě vydá kýženou nerovnost.