NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 6

Spektrální teorie grafů II.
Silně regulární grafy, Friendship theorem, Proplétání vlastních čísel
10. listopad 2020

Silně regulární grafy

Definice: Graf se nazývá *silně regulární*, pokud není úplný a existují čísla d, e, f taková, že stupeň každého vrcholu je roven d, každé dva sousední vrcholy mají e společných sousedů a každé dva nesousední vrcholy mají f společných sousedů.

Věta: Je-li G silně regulární graf s parametry d, e, f, potom nastává jedna z následujících možností

- $f = e + 1, d = 2f, |V(G)| = 2d + 1$, nebo
- existuje přirozené číslo s takové, že $s^2 = (e-f)^2 - 4(f-d)$ a $\frac{d}{2fs}((d-1+f-e)(s+f-e)-2f)$ je přirozené číslo.

Důkaz: Nechť A je matice sousednosti grafu G a nechť $n = |V(G)|$. Z vlastností grafu G plyne

$$A^2 = dE + eA + f(J - E - A)$$

a tedy

$$A^2 + (f - e)A + (f - d)E = fJ.$$

Pro největší vlastní číslo matice A, což je d, platí $d^2 + (f-e)d + (f-d) = fn$ a pro každé další vlastní číslo λ matice A pak platí

$$\lambda^2 + (f - e)\lambda + (f - d) = 0,$$

neboť 0 je $(n-1)$-násobné vlastní číslo matice J. Položme

$$D = (e - f)^2 - 4(f - d),$$

pak

$$\mathrm{Sp}\ G = \{d, \frac{1}{2}(e - f + \sqrt{D})^{(p)}, \frac{1}{2}(e - f - \sqrt{D})^{(q)}\}$$

pro nezáporná celá čísla p, q. Pro počet vlastních čísel, jejich součet a součet jejich druhých mocnin pak platí

$$1 + p + q = n$$
$$d + \frac{p}{2}(e - f + \sqrt{D}) + \frac{q}{2}(e - f - \sqrt{D}) = 0$$
$$d^2 + \frac{p}{4}(e - f + \sqrt{D})^2 + \frac{q}{4}(e - f - \sqrt{D})^2 = nd.$$

A) Je-li $\sqrt{D}$ iracionální, pak $p = q = \frac{n-1}{2}$ a buď $f - e \geq 2$ (v kterémžto případě G by byl úplný graf), nebo $f - e = 1$, z čehož pak plyne $d = 2f$ a $n = 2d + 1$.

B) Je-li $\sqrt{D}$ racionální, pak $D = s^2$ pro přirozené číslo s. V tomto případě

$$p = \frac{d}{2fs}((d - 1 + f - e)(s + f - e) - 2f)$$

musí být celé číslo.

Friendship theorem

Věta: Nechť v grafu G mají každé dva různé vrcholy právě jednoho společného souseda. Potom G obsahuje vrchol, který sousedí se všemi ostatními vrcholy tohoto grafu.

Důkaz: Nechť G je takový graf. Množiny sousedů, tj. $N_G(u), u \in V(G)$, splňují $|N_G(u) \cap N_G(v)| = 1$ pro každé $u \neq v$, a též pro každé dva různé vrcholy u, v existuje právě jedna množina $N_G(w)$ taková, že $u, v \in N_G(w)$. Množinový systém $\mathcal{N}_G = (V(G), \{N_G(u) : u \in V(G)\})$ tak splňuje dva ze tří axiomů projektivních rovin.

Pokud $\mathcal{N}_G$ splňuje i třetí axiom, tj. existenci čtyř bodů, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce, pak se jedná o projektivní rovinu. Speciálně pak existuje číslo m takové, že $|N_G(u)| = m + 1$ pro každý vrchol u a $|V(G)| = m^2 + m + 1$. V tom případě je G silně regulární graf s parametry $d = m + 1, e = 1, f = 1$ a G má $m^2 + m + 1$ vrcholů. Ve větě o parametrech silně regulárních grafů musí nastat druhá možnost (neboť $f = e \neq e + 1$), tedy $s = 2\sqrt{m} = 2t$ pro přirozené číslo t. Po úpravě pak dostaneme

$$p = \frac{d}{2fs}((d - 1 + f - e)(s + f - e) - 2f) = \frac{(t^2 + 1)(t^3 - 1)}{2t}$$

což pro $t > 1$ přirozené číslo být nemůže.

Proplétání vlastních čísel

Věta: Nechť $A \in C^{n \times n}$ je Hermitovská matice, nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n$ jsou její vlastní čísla, a nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n \in C^n$ je ortonormální báze složená z vlastních vektorů (u_i je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.) Pak pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ platí

- $x^*Ax \geq \lambda_k x^*x$ pro všechny vektory $x \in \langle\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}\rangle$,
- $x^*Ax \leq \lambda_k x^*x$ pro všechny vektory $x \in \langle\{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}\rangle$.

Věta (Proplétání vlastních čísel): Nechť $A \in C^{n\times n}$ je Hermitovská matice a nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n$ jsou její vlastní čísla. Nechť B je její hlavní podmatice řádu $k \times k$ (tj. B vznikne z A vynecháním $n-k$ řádků a jim odpovídajících $n-k$ sloupců) a nechť vlastní čísla matice B jsou $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_k$. Potom pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$ platí

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+n-k}.$$

Důkaz: Dokážeme nejprve pro $k = n-1$. Nechť B vznikne z A vynecháním řádku a sloupce s indexem j. Nechť $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset C^n$ je ortonormální báze matice A a $\{y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\} \subset C^{n-1}$ ortonormální báze matice B. Pro $y \in C^{n-1}$, označme $z(y)$ vektor délky n vzniklý z vektoru y tak, že za prvních $j-1$ složek vložíme nulu. Potom pro každé $y \in C^{n-1}$ je $z^*(y)z(y) = y^*y$ a $z^*(y)Az(y) = y^*By$. Označme

$$S_1 = \langle\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}\rangle,$$
$$S_2 = \langle\{y_1, y_2, \ldots, y_i\}\rangle,$$
$$S_3 = \{z(y) : y \in S_2\}.$$

Potom $x^*Ax \leq \lambda_i x * x$ pro každé $x \in S_1$ a $z^*(y)Az(y) = y^*By \geq \mu_i y^*y = z^*(y)z(y)$ pro každé $y \in S_2$, a tedy každé $z = z(y) \in S_3$. Protože dim $S_1 = n-i+1$ a dim $S_2 =$ dim $S_3 = i$, je dim $S_1 +$ dim $S_3 > n \geq$ dim $(S_1 + S_3)$, a tedy dim $(S_1 \cap S_3) > 0$. Existuje tedy nenulový vektor $z \in S_1 \cap S_3$. Toto z je rovno $z(y)$ pro nějaké $y \in S_2$ a platí

$$\lambda_i z^*z \geq z^*Az = y^*By \geq \mu_i y^*y = \mu_i z^*z,$$

a tedy $\lambda_i \geq \mu_i$.

Pro důkaz nerovnosti $\lambda_i \geq \mu_{i+1}$ postupujeme obdobně, volíme

$$S_1 = \langle\{x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}\}\rangle,$$

$$S_2 = \langle\{y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{n-1}\}\rangle.$$

Vidíme, že vlastní čísla matice B se střídají s vlastními čísly matice A, odtud název *proplétání* vlastních čísel:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Pro obecný případ, kdy podmatice B je řádu $k \times k$, aplikujeme předchozí postup $(n-k)$-krát, neboť B vznikne z A opakováním operace "vynechej řádek a odpovídající sloupec" $(n-k)$-krát.

Odhady pro nezávislost a barevnost pomocí vlastních čísel

Věta: Nechť G je graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\alpha(G) \leq \min \{|\{i : \lambda_i \leq 0\}|, |\{i : \lambda_i \geq 0\}|\}.$$

Důkaz: Nechť $W \subseteq V(G)$ je nezávislá množina velikosti $\alpha = \alpha(G)$ v G. Matice sousednosti grafu $G[W]$ je nulová matice řádu $\alpha \times \alpha$, a současně je to hlavní podmatice matice sousednosti grafu G. Proto její vlastní čísla (což jsou samé nuly) proplétají vlastní čísla grafu G. Tedy $\lambda_\alpha \geq 0 \geq \lambda_{n-\alpha+1}$, odkud již dokazovaná nerovnost plyne.

Věta: Nechť G je d-regulární graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\alpha(G) \leq n \cdot \frac{-\lambda_n}{d - \lambda_n}.$$

Důkaz: Nechť A je matice sousednosti grafu G. Uvažme matici

$$C = A - \frac{1}{n}(d - \lambda_n)J.$$

Matice A a J komutují, a proto mají společnou ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů, přičemž vektor $\mathbf{1}$ ze samých jedniček je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu d matice A, i vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu n matice J. Odtud odvodíme, že λ_n je nejmenší vlastní číslo matice C. Nechť $W \subseteq V(G)$ je nezávislá množina velikosti $\alpha = \alpha(G)$ v G a nechť $B = -\frac{1}{n}(d - \lambda_n)J$ je hlavní podmatice matice C určená řádky a sloupci z W. Nejmenší vlastní číslo matice B je $-\frac{\alpha}{n}(d - \lambda_n)$. Vzhledem k proplétání vlastních čísel je

$$-\frac{\alpha}{n}(d - \lambda_n) \geq \lambda_n,$$

odkud již dokazovaná nerovnost snadno plyne.

Důsledek: Nechť G je d-regulární graf o n vrcholech s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Potom

$$\chi(G) \geq 1 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_n|}.$$