NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 5

Spektrální teorie grafů I.
Vlastní čísla grafu, Moorovy grafy
3. listopad 2020

Vlastní čísla matic

Definice: *Vlastní číslo* čtvercové matice $A \in T^{n\times n}$ je takové číslo $\lambda \in T$, že existuje nenulový vektor $v \in T^n$ takový, že $Av = \lambda v$. Takový vektor se pak nazývá *vlastní vektor* matice A příslušný vlastnímu číslu λ. Množina $\mathcal{V}_\lambda$ všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ tvoří vektorový podprostor prostoru T^n.
Vlastnosti: Zřejmě platí, že λ je vlastní číslo matice A právě tehdy, když rovnice $(A-\lambda E)v = o$ má netriviální řešení, tedy když $\det(A-\lambda E) = 0$. Tento determinant je polynom stupně n v proměnné λ, říká se mu *charakteristický polynom* matice A a značí se $\chi_A(\lambda)$. Je tedy λ vlastním číslem matice A právě tehdy, když je kořenem jejího charakteristického polynomu. Násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu se pak nazývá *algebraická násobnost* vlastního čísla λ, zatímco *geometrická násobnost* vlastního čísla λ je dimenze prostoru $\mathcal{V}_\lambda$. Geometrická násobnost vlastního čísla je vždy nejvýše rovna jeho algebraické násobnosti.
Definice: Soubor všech vlastních čísel matice A se nazývá *spektrum* matice A a značí se $\mathrm{Sp}\ A$.

Ortonormální báze složená z vlastních vektorů

Nadále budeme pracovat výhradně nad tělesem komplexních čísel C, i když uvažované matice budou reálné. Velkou výhodou tohoto přístupu je, že charakteristický polynom matice $A \in C^{n\times n}$ má n kořenů (počítáno s násobnostmi).
Věta: Nechť $A \in C^{n\times n}$. Potom $\sum_{\lambda_i \in Sp\ A} \lambda_i = \mathrm{tr}\ A$, kde $\mathrm{tr}\ A$ je stopa matice A, neboli součet prvků na hlavní diagonále. Toto se nahlédne z Vietových vztahů pro kořeny charakteristického polynomu matice A.
Uvědomme si dále, že nad komplexními čísly se skalární součin definuje jinak, než jako standardní skalární součin. Pro komplexní číslo $x = a + bi$ definujeme číslo komplexně sdružené $x^* = a - bi$, pro matici $A \in C^{n\times k}$ pak její *Hermitovskou transpozici* $A^* \in C^{k\times n}$ předpisem $(A^*)_{ij} = (A_{ji})^*$. Chápeme-li vektory $x, y \in C^n$ jako sloupcové vektory, pak skalární součin je definován jako $\langle x, y\rangle = x^*y = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i$.
Definice: Báze $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se nazývá *ortonormální* pokud $X^*X = E$, tj. $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ pro všechna $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice: Matice $A \in C^{n \times n}$ se nazývá *normální*, pokud komutuje se svojí Hermitovskou transpozicí, tj. pokud $AA^* = A^*A$.
Věta: Matice $A \in C^{n \times n}$ má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů (formálně přesněji prostor C^n má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů matice A) právě tehdy, když je A normální.
Důsledek: Je-li $A \in C^{n \times n}$ normální matice, pak pro každé její vlastní číslo je algebraická násobnost rovná geometrické.
Věta: Matice $A_1, A_2, \dots, A_k \in C^{n \times n}$ mají společnou ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů právě tehdy, když všechny A_i jsou normální a každé dvě z nich spolu komutují.
Definice: Matice $A \in C^{n \times n}$ se nazývá *Hermitovská*, pokud $A^* = A$.
Věta: Matice $A \in C^{n \times n}$ je Hermitovská právě tehdy, když je normální a všechna její vlastní čísla jsou reálná.
Věta (Frobenious): Pro každou nezápornou reálnou matici $A \in R^n$ existuje reálné vlastní číslo $\lambda_0 \in \text{Sp } A$ takové, že $|\lambda| \leq \lambda_0$ pro každé $\lambda \in \text{Sp } A$.
Věta: Nechť $A \in C^{n \times n}$ je Hermitovská matice a nechť $P(x) \in C[x]$ je polynom v proměnné x s komplexními koeficienty. Potom $\text{Sp } P(A) = \{P(\lambda) : \lambda \in \text{Sp } A\}$. Konkrétně pro každé $\kappa \in \text{Sp } P(A)$ je jeho násobnost jako vlastního čísla matice $P(A)$ rovna součtu násobností vlastních čísel λ matice A, pro něž $P(\lambda) = \kappa$.

Vlastní čísla grafů Definice: *Vlastní číslo* grafu G je vlastní číslo jeho matice sousednosti A_G. *Spektrum* grafu G je spektrum jeho matice sousednosti.
Vlastnosti: Protože A_G je symetrická reálná matice, je Hermitovská, a tedy má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů. Navíc všechna vlastní čísla grafu G jsou reálná. Obvykle píšeme $\text{Sp } G = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n\}$. Pokud je málo z nich různých, zapisujeme stručně $\text{Sp } G = \{\kappa_1^{(n_1)}, \kappa_2^{(n_2)}, \dots, \kappa_t^{(n_t)}\}$, kde n_i je násobnost vlastního čísla κ_i a $\kappa_i \neq \kappa_j$ pro $i \neq j$.

Moorovy grafy

Tato kapitola je motivována otázkou, jak velké (tedy vlastně jak malé) mohou být regulární grafy bez krátkých cyklů.
Pozorování: Nechť G je r-regulární graf obvodu většího než 4 (tedy G nemá ani trojúhelníky ani kružnice délky 4). Potom $|V(G)| \geq r^2 + 1$.
Definice: Grafy extremální ve smyslu předchozího Pozorování, tj. r-regulární grafy bez trojúhelníků a kružnic délky 4, které mají přesně $r^2 + 1$ vrcholů, se nazývají *Moorovy grafy*.
Příklad: Kružnice délky 5 je 2-regulární Moorův graf.

Věta (Hoffman, Singleton, 1960): Moorovy grafy existují pro $r = 1, 2, 3, 7$ a možná $r = 57$, ale po žádné jiné r.