NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 4

Lineární formy, duální homomorfismus, Seidelův switching
27. říjen 2020

Lineární formy, duální prostor, duální homomorfismus

Definice: Budiž $\mathcal{V}$ vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem T. *Lineární forma* na $\mathcal{V}$ je lineární zobrazení (homomorfismus) prostoru $\mathcal{V}$ do tělesa T. Lineární formy tvoří vektorový prostor nad T, značíme jej $\mathcal{V}^*$ a říkáme mu *duální prostor* k prostoru $\mathcal{V}$. Je-li $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ báze prostoru $\mathcal{V}$, pak *duální báze* k bázi B je definována jako $B^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, kde formy $f_i, i = 1, 2, \ldots, n$ jsou dány předpisem

$$f_i(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{když } i = j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nechť $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou vektorové prostory nad tělesem T, $\dim \mathcal{U} = n$ a $\dim \mathcal{V} = k$. Nechť $\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ je homomorfismus. *Duální homomorfismus* k Φ je zobrazení $\Phi^* : \mathcal{V}^* \longrightarrow \mathcal{U}^*$ definované takto: Pro lineární formu $f \in \mathcal{V}^*$ je $\Phi^*(f)$ lineární forma na $\mathcal{U}$ splňující

$$\Phi^*(f)(u) = f(\Phi(u))$$

pro každý vektor $u \in \mathcal{U}$.

Věta: Matice duálního homomorfismu vzhledem k duálním bázím je transponovanou maticí k matici primárního homomorfismu. Formálně

$${}_{C^*}[\Phi^*]_{B^*} = ({}_B[\Phi]_C)^T$$

pro báze B (prostoru $\mathcal{U}$) a C (prostoru $\mathcal{V}$).

Faktorprostor

Definice: Nechť $\mathcal{W}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Prvky *faktorprostoru* $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ jsou lineární množiny $u + \mathcal{W}, u \in \mathcal{V}$. Faktorprostor je vektorový prostor vůči operacím $(u + \mathcal{W}) + (v + \mathcal{W}) = (u + v) + \mathcal{W}$ a $\lambda \cdot (u + \mathcal{W}) = (\lambda \cdot u) + \mathcal{W}$. Přitom platí $\dim(\mathcal{V}/\mathcal{W}) = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W}$.

Věta: Nechť $\mathcal{V} = T^n$ a nechť $\mathcal{W}$ je vektorový podprostor $\mathcal{V}$. Potom $\mathcal{V}/\mathcal{W}^\perp \simeq \mathcal{W}^*$.

Důkaz: Definujme zobrazení $\phi : \mathcal{V}/\mathcal{W}^{\perp} \longrightarrow \mathcal{W}^*$ tak, že $\phi(v + \mathcal{W}^{\perp})(x) = \langle v, x\rangle$ pro každé $x \in \mathcal{W}$. Ukáže se, že ϕ je korektně definované lineární zobrazení, které je injektivní. Protože $\mathrm{Im}\ \phi$ je podprostor $\mathcal{W}^*$ stejné dimenze jako $\mathcal{W}^*$, je ϕ též surjektivní.

Akce grupy na množině, Burnsidovo lemma

Definice: *Akce* grupy G na množině M je zobrazení $G \times M$ do množiny M dané předpisem $(g, m) \longrightarrow gm$ splňující 1) $1m = m$ pro každé $m \in M$ a 2) $(gh)m = g(hm)$ pro každé $g, h \in G$ a $m \in M$. Lze ukázat, že pro každé $g \in G$ je zobrazení $\phi_g : M \longrightarrow M$ dané předpisem $\phi_g(m) = gm$ permutací prvků z M. Definujeme následující množiny:
$G_m = \{g \in G : gm = m\}$ je *stabilizátor* prvku $m \in M$,
$M_m = \{gm : g \in G\}$ je *orbita* prvku $m \in M$,
$M_g = \{m \in M : gm = m\}$ je množina *pevných bodů* permutace ϕ_g pro $g \in G$.

Věta (Burnsidovo lemma): Pro velikost orbit platí $|M_m| = \frac{|G|}{|G_m|}$ pro každé $m \in M$. A počet orbit je roven $\frac{1}{|G|}\sum_{m\in M}|G_m| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M_g|$.

Lemma: Nechť grupa G provádí akci na množině M a grupa H na množině N. Nechť dále $\phi : M \longrightarrow N$ je bijekce. Pokud pro prvky $g \in G$ a $h \in H$ platí $h\phi(m) = \phi(gm)$ pro každé $m \in M$, potom $|M_g|=|N_h|$.

Seidelův switching

Definice: Operace *Seidelův switching* provedena na graf G a jeho vrchol v vymění všechny hrany a nehrany z vrcholu v vycházející, formálně $S(G, v) = (V(G), (E(G) \cup \{vx : vx \notin E(G)\}) \setminus \{vx : vx \in E(G)\})$. Grafy G a H na stejné množině vrcholů jsou *Seidelovsky ekvivalentní*, pokud lze G převést na H nějakou posloupností Seidelových switchingů, v tom případě píšeme $G \sim H$. Píšeme $G \approx H$ pokud existuje graf H' izomorfní grafu H takový, že $G \sim H'$.

Příklad: Ekviangulární systémy přímek v prostoru.

Pozorování: Dva grafy na dané množině vrcholů V jsou Seidelovsky ekvivalentní, právě když leží ve stejné lineární množině ve faktorprostoru $\mathcal{V}_{K_V}/\mathcal{B}_{K_V}$. Proto je tříd ekvivalence při Seidelově switchingu přesně tolik, jako Eulerovských grafů na dané množině vrcholů.

Tvrzení: Je-li počet vrcholů v množině V lichý, pak každá třída ekvivalence při Seidelově switchingu obsahuje právě jeden Eulerovský graf.

Věta: Počet neizomorfních tříd ekvivalence při Seidelově switchingu na n vrcholech je roven počtu Eulerovských grafů na n vrcholech.

Důkaz: Pro liché n vyplývá tvrzení z dříve uvedeného pozorování, že každá třída ekvivalence obsahuje právě jeden Eulerovský graf, což zůstane zachováno i po faktorizaci izomorfismem. Tvrzení je mnohem méně triviální pro sudá n. Následující důkaz ovšem nijak neodvisí od parity

počtu vrcholů.
Označme $\mathcal{V}$ prostor všech grafů na dané množině vrcholů V, $\mathcal{B}$ prostor všech elementárních řezů na úplném grafu K_V a $\mathcal{E}$ prostor všech Eulerovských grafů na množině vrcholů V. Víme, že $\mathcal{B} = \mathcal{E}^{\perp}$. Potom jsou prostory $\mathcal{E}^*$ a $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ izomorfní, a přitom prvky $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ jsou právě třídy ekvivalence při Seidelově switchingu. Nás ovšem zajímá počet tříd, které jsou různé i po faktorizaci grafovým izomorfismem. Neboli počet orbit prostoru $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ při akci grupy permutací Sym_V.
Je-li $\sigma \in Sym_V$, pak pro libovolný graf $G \in \mathcal{V}$ budiž $\sigma(G) = (V, \{\sigma(u)\sigma(v) : uv \in E(G)\})$. Tuto akci grupy permutací lze prodloužit analogicky na akci na $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ a na akci na $\mathcal{E}$. Ve druhém případě lze na σ pohlížet jako na automorfismus prostoru $\mathcal{E}$, a uvažovat duální homomorfismus σ^*. Připomeňme, že $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}^*$ jsou izomorfní, jejich izomorfismus jsme označili ϕ. Potom pro každý graf G a každou permutaci σ platí $\phi(\sigma(G)) = (\sigma^{-1})^*(\phi(G))$, a tedy $|(\mathcal{V}/\mathcal{B})_\sigma| = |\mathcal{E}^*_{\sigma^{-1}}|$ a podle Burnsidova lemmatu je počet orbit $\mathcal{V}/\mathcal{B}$ při akci grupy permutací stejný jako počet orbit $\mathcal{E}^*$.
Zbývá ukázat, že počet orbit $\mathcal{E}^*$ je stejný jako počet orbit $\mathcal{E}$. Opět použijeme Burnsidovo lemma, potřebujeme porovnat počty pevných bodů v $\mathcal{E}$ při akci σ s počtem pevných bodů $\mathcal{E}^*$ při akci σ^*. Je ovšem $\mathcal{E}_\sigma = \{G \in \mathcal{E} : \sigma(G) = G\} = Ker(\sigma + id)$. Podobně ${\mathcal{E}^*}_{\sigma^*} = Ker(\sigma^* + id^*) = Ker(\sigma + id)^*$. Protože matice duálního homomorfismu je transponovaná k matici primárního, mají stejnou hodnost, a tedy i jádra mají stejnou dimenzi. Proto pro každé σ je $|\mathcal{E}_\sigma| = |{\mathcal{E}^*}_{\sigma^*}|$ a podle Burnsidova lemmatu je počet orbit $\mathcal{E}^*$ při akci grupy permutací stejný jako počet orbit $\mathcal{E}$, tedy jako počet neizomorfních Eulerovských grafů na dané množině vrcholů.