NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 2

Princip lineární závislosti a nezávislosti vektorů, velikosti speciálních množinových systémů a 2-vzdálenostních množin bodů
13. říjen 2020

Lineární závislost a nezávislost

Definice: Konečná množina vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem T je *lineárně nezávislá*, pokud jediná lineární kombinace těchto vektorů, která se rovná nulovému vektoru, je kombinace triviální.
Hodnost matice $A \in T^{n\times k}$ je maximální počet lineárně nezávislých řádků této matice, jakož i maximální počet lineárně nezávislých sloupců; hodnost matice A značíme $\mathrm{rank}A$.

Užitečné principy: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ lineárně nezávislé, pak $k \leq \dim\mathcal{V}$.
Pro každé dvě matice A, B, které je možno násobit, platí $\mathrm{rank}AB \leq \min\{\mathrm{rank}A, \mathrm{rank}B\}$.
Číselné vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n \in T^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $\det(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

Otázka k zamyšlení: Každé těleso T obsahuje prvky 0 a 1. Takže vektory, jejichž všechny složky jsou 0 nebo 1, je možno chápat nad různými tělesy. Např. nad $GF(2), GF(p), GF(p^n), Q, R, C$. Pro které dvojice těles T, T' z výše uvedené množiny platí tvrzení: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \{0,1\}^n$ lineárně nezávislé nad tělesem T, potom jsou lineárně nezávislé i nad tělesem T'?

Mohutnosti množinových systémů

Věta (skoro-disjunktní systémy množin): Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou různé podmnožiny n-prvkové množiny X takové, že každé dvě z nich mají právě jeden společný prvek. Potom $k \leq n$.

Důkaz: Nechť A je matice incidence tohoto množinového systému. Potom A^TA je čtvercová matice řádu $k \times k$, která na diagonále má mohutnosti množin a mimo diagonálu samé jedničky, pokud matici A chápeme nad tělesem R. Pak $\det A^TA \neq 0$, a tedy $k = \mathrm{rank}A^TA \leq \mathrm{rank}A \leq n$.

Věta (pohádka o sudo-lichoměstech): V jistém městě, přezdívaném Even-Oddton, si obyvatelé libovali ve sdružování se v klubech. Když množství klubů začalo administrativě přerůstat přes hlavu, matematiky znalý starosta vydal nařízení, že každý klub musí mít lichý počet členů,

a navíc každé dva kluby musí mít sudý počet společných členů. Povedlo se mu tímto nařízením počet klubů výrazně omezit?
Matematická formulace, včetně odpovědi: Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou různé podmnožiny n-prvkové množiny X takové, že každá má lichý počet prvků a každé dvě z nich mají sudý počet společných prvků. Potom $k \leq n$.

Důkaz: Nechť A je matice incidence tohoto množinového systému. Potom $A^T A$ je čtvercová matice řádu $k \times k$, která na diagonále má mohutnosti množin a mimo diagonálu mohutnosti průniků, pokud matici A chápeme nad tělesem R. Chápejme ji ale nad dvouprvkovým tělesem $GF(2)$. Pak $A^T A = E$, a tedy $k = \mathrm{rank} A^T A \leq \mathrm{rank} A \leq n$.

Otázka k zamyšlení: Kolik klubů může být v anaglogicky definovaném Odd-Eventonu? A kolik v Even-Eventonu? A kolik v Odd-Oddtonu?

Dvouvzdálenostní množiny bodů v prostoru

Definice: Množina bodů v R^n se nazývá *s-vzdálenostní* pokud vzájemné vzdálenosti těchto bodů nabývají celkem nejvýše s hodnot.

Věta: Nechť $m_s(n)$ značí maximální počet bodů s-vzdálenostní množiny v n-dimenzionálním Eukleidovském prostoru. Potom

$$\binom{n+1}{2} \leq m_2(n) \leq \frac{(n+1)(n+4)}{2}.$$

Důkaz: Nechť $A_1, \ldots, A_m$ jsou body 2-vzdálenostní množiny v R^n a nechť $a \neq b$ jsou hodnoty možných vzdáleností dvojic těchto bodů. Definujme funkci $F(X,Y) = (d^2(X,Y) - a^2)(d^2(X,Y) - b^2)$ pro $X, Y \in R^n$ (kde $d(x,y)$ značí Eukleidovskou vzdálenost bodů X, Y). Potom funkce $f_i(X) = F(X, A_i), i = 1, 2, \ldots, m$ jsou lineárně nezávislé. Přitom všechny náležejí do prostoru polynomů v n proměnných (souřadnicích bodu X). Vhodnou volbou generátorů lze ukázat, že všechny tyto funkce patří do podprostoru dimenze $\frac{(n+1)(n+4)}{2}$.

Otázky na rozmyšlenou:
1. Pro s-vzdálenostní množiny v n-dimenzionálním Eukleidovském prostoru platí

$$\binom{n+1}{s} \leq m_s(n) \leq \binom{n+s+1}{s}.$$

2. *Sférická 2-vzdálenostní množina* je 2-vzdálenostní množina, jejíž všechny body leží na povrchu koule se středem v počátku. Nechť $m_s^{sf}(n)$ značí maximální počet bodů sférické s-vzdálenostní množiny v n-dimenzionálním Eukleidovském prostoru. Potom

$$\binom{n+1}{2} \leq m_s^{sf}(n) \leq \frac{n(n+3)}{2}.$$