NDMI028 Aplikace lineární algebry v kombinatorice
Handout No. 1

Maticový popis grafů, mocnění matice sousednosti, determinanty a kostry
6. říjen 2020

Maticový popis grafu

Definice: Matice sousednosti neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je čtvercová matice $A = A_G \in \{0,1\}^{V\times V}$ definovaná předpisem

$$A_{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } uv \in E \\ 0 & \text{pokud } uv \notin E \end{cases} .$$

Matice sousednosti jednoduchého neorientovaného grafu (tj. neorientovaného grafu bez smyček a násobných hran) je symetrická matice a na její hlavní diagonále jsou všechny prvky 0.

Definice: Matice incidence neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je obdélníková matice $I = I_G \in \{0,1\}^{V\times E}$ definovaná předpisem

$$I_{u,e} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } u \in e \\ 0 & \text{pokud } u \notin e \end{cases} .$$

Matice incidence grafu je tedy matice incidence množiny hran E chápané jako množinový systém.

Definice: Laplacova matice neorientovaného grafu $G = (V, E)$ je čtvercová matice $L = L_G \in Z^{V\times V}$ definovaná předpisem

$$L_{u,v} = \begin{cases} \deg_G u & \text{pokud } u = v \\ -1 & \text{pokud } u \neq v \text{ a } uv \in E \\ 0 & \text{pokud } u \neq v \text{ a } uv \notin E \end{cases} .$$

Kontrolní cvičení: Dokažte, že pro každý graf G je $\det(L_G) = 0$.

Mocnění matice sousednosti

Věta: Pro každý graf G a každé přirozené číslo k obsahuje k-tá mocnina matice sousednosti A počty sledů délky k mezi vrcholy grafu G, konkrétně

$$(A^k)_{u,v} = \text{počet sledů délky } k \text{ od } u \text{ k } v \text{ v } G.$$

Důkaz indukcí podle k.

Kontrolní cvičení: Jak se z matice sousednosti snadno pozná, že daný graf nemá žádné trojúhelníky?

Počet koster grafu pomocí determinantu

Věta: Nechť $L_G^{(u)}$ značí Laplacovu matici grafu G po vyškrtnutí řádku a sloupce odpovídajících vrcholu u. Potom

$$\det(L_G^{(u)}) = \text{ počet koster grafu } G$$

platí pro každý graf G a každý vrchol $u \in V(G)$.

Osnova důkazu:

1. Vezměme matici incidence I_G a v každém jejím sloupci nahradíme jednu jedničku hodnotou -1. Výslednou matici označme D_G. (Pozor, tato matice není určena jednoznačně, jednu takovou matici vybereme a zafixujeme.)

2. Ukážeme, že $D_G D_G^T = L_G$.

3. Pro vrchol $u \in V(G)$ označme $D_G^{(u)}$ matici D_G po vyškrtnutí řádku indexovaného vrcholem u. Potom $D_G^{(u)}(D_G^{(u)})^T = L_G^{(u)}$.

4. Použijeme Cauchy-Binetovu formuli pro výpočet determinantu součinu dvou obdélníkových matic. Jejím důsledkem je zjištění, že

$$\det(L_G^{(u)}) = \sum_{\omega \subseteq E, |\omega| = n-1} \det{}^2(D_G^{(u)})_\omega,$$

   kde $n = |V(G)|$ a $(D_G^{(u)})_\omega$ značí matici složenou ze sloupců matice $D_G^{(u)}$ odpovídajících indexům z množiny ω.

5. Klíčové pozorování je toto:

$$|\det(D_G^{(u)})_\omega| = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (V, \omega) \text{ je strom} \\ 0 & \text{pokud } (V, \omega) \text{ není strom} \end{cases}.$$

6. Z předchozího vyplývá, že

$$\det(L_G^{(u)}) = \sum_{\omega \subseteq E, |\omega| = n-1} \det{}^2(D_G^{(u)})_\omega = \sum_{\omega \subseteq E, |\omega| = n-1, (V,\omega) \text{ je kostra grafu } G} 1$$

$$= \text{ počet koster grafu } G.$$