Domácí úlohy z lineární algebry 2

15. března 2023

Martin Černý

Na zápočet bude třeba získat alespoň polovinu bodů z následujících úloh (120 z 240 bodů). Řešení úloh odevzdávejte e-mailem, nebo na začátku cvičení v libovolné čitelné podobě. Několik dalších poznámek:

- Na úlohách je možné spolupracovat a používat všechny možné dostupné zdroje. Řešení úloh musí nicméně sepsat a odevzdat každý sám za sebe.
- Řešením úlohy často není pouze výsledek, ale řádně vysvětlený postup, jak jste k řešení došli, případně důkaz toho, co ve výsledku tvrdíte.
- V případě, že byste si nevěděli s domácími úkoly rady, nebo chtěli něco prodiskutovat, není problém se domluvit na konzultaci.
- Pokud v zadání úlohy není výslovně požadován důkaz něčeho, co bylo na přednášce, či cvičení, je možné se při řešení úlohy na tento výsledek odkázat a není třeba ho již dokazovat.
- Pokud chcete použít ve svém řešení výsledek, který se neobjevil na přednášce, je třeba ho řádně zadefinovat a případně dokázat jeho platnost.

(1) Skalární součin (36 bodů)

Deadline: 27. února 2023

1. **(10 bodů)** Mějme $\langle x,y\rangle = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ a vektory $x = (1,2)^T$ a $y = (2,5)^T$.
   (a) (6 bodů) Ukažte, že se jedná o skalární součin,
   (b) (1 body) spočtěte $\langle x,y\rangle$,
   (c) (1 body) spočtěte $\|x\|$,
   (d) (2 body) spočtěte vzdálenost x od y.
2. **(3 body)** Dokažte nebo vyvraťte, že v prostoru matice $\mathbb{R}^{m\times n}$ je zobrazení $\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ skalární součin.
3. **(3 body)** Je skalární součin lineární zobrazení?
4. **(6 bodů)** Určete úhel mezi:
   (a) (3 body) vektory $x = (0,0,1)^T$ a $y = (1,0-1)^T$,
   (b) (3 body) hlavní diagonálou krychle a její podstavou.
5. **(6 bodů)** Buď $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární. Ukažte, že pro $i \neq j$ je $i-$tý řádek matice A kolmý na $j-$tý sloupec matice A^{-1}.
6. **(8 bodů)** Zaveďte v prostoru $\mathbb{R}^2$ skalární součin tak, aby x bylo kolmé na y, kde $x = (1,2)^T$ a $y = (2,3)^T$.

(2) Norma (37 bodů)

Deadline: 13. března 2023

1. **(3 body)** Rozhodněte, zda $\|x\| = |x_1 - x_2| + |x_2|$ je norma.
2. **(8 bodů)** Rozhodněte které průměry (aritmetický, geometrický, harmonický, kvadratický) jsou normou.
3. **(3 body)** Dokažte, že $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
4. **(3 body)** Rozhodněte, zda pro každou normu na $\mathbb{R}^n$ platí: $\|x\| = \||x|\|$, kde $|(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T| = (|x_1|, |x_2|, \ldots |x_n|)^T$.
5. **(20 bodů)** Pro danou normu na $\mathbb{R}^n$ nazvěme matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *isometrií* pokud $\|Ax\| = \|x\|$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) (3 body) Ukažte, že isometrie musí být regulární.
   (b) (5 bodů) Ukažte, že množina isometrií tvoří grupu s operací maticový součin.
   (c) (5 bodů) Najděte všechny isometrie pro 2-normu.
   (d) (7 bodů) Najděte všechny isometrie pro 1-normu a ∞-normu.

(3) Cauchy-Schwarz, Gram-Schmidt a ortogonalita (30 bodů)

Deadline: 27. března 2023

1. **(3 body)** Dokažte, že pro každé $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ platí: $5a_1 + a_2 + 3a_3 + a_4 \leq 6\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$.
2. **(3 body)** Dokažte vztah mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem.
3. **(10 bodů)** Stopa matice je definována jako $trace(A) = \sum_i a_{ii}$. Ukažte, že platí:
   (a) (3 body) $trace(A)^2 \leq n \cdot trace(A^T A)$,
   (b) (3 body) $trace(A^2) \leq trace(A^T A)$,
   (c) (4 body) $trace(A^T B) \leq \frac{1}{2}(trace(A^T A) + trace(B^T B))$.
4. **(10 bodů)** Buď $v_1 = (1,1,0)^T$ a $v_2 = (1,1,1)^T$:
   (a) (3 body) ortogonalizujte vektory v_1, v_2,
   (b) (3 body) proveďte ortogonalizaci v opačném pořadí vektorů,
   (c) (4 body) najděte projekci $x = (0,1,1)^T$ do podprostoru $U = span\{v_1, v_2\}$. Jaká ja vzdálenost x od U?
5. **(4 body)** Zortogonalizujte bázi podprostoru $\mathbb{R}^4$ popsaného soustavou $x - y + u + v = 0$, $x + u = 0$.

(4) Ortogonální matice, doplněk a projekce (29 bodů)

Deadline: 17. dubna 2023

1. **(3 body)** Nechť P, Q jsou ortogonální matice. Je i $P + Q$ ortogonální?
2. **(3 body)** Najděte všechny diagonální ortogonální matice řádu n. Kolik jich je?
3. **(6 bodů)** Ortogonální matice Q obsahuje pouze prvky $\frac{1}{4}$ a $-\frac{1}{4}$. Jaký je rozměr matice Q?
4. **(8 bodů)** Najděte matici projekce do
   (a) (3 body) $U = span\left\{(2,1,1)^T\right\}$
   (b) (5 bodů) $V = span\left\{(0,1,1)^T, (1,0,-1)^T, (0,0,1)^T\right\}$
5. **(3 body)** Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Najděte řádkový prostor a kernel matice A.
6. **(6 bodů)** Najděte ortogonální doplněk k prostorům:
   (a) (3 body) $U = \left\{(1,0,1,1)^T, (1,1,1,0)^T\right\}$,
   (b) (3 body) $V = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\right\}$.

(5) Determinant (28 bodů)

Deadline: 24. dubna 2023

1. **(20 bodů)** Spočítejte determinanty:

   (a) (2 body) $det(-4)$,

   (b) (2 body) $det(-I_n)$,

   (c) (4 body) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$,

   (d) (4 body) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$,

   (e) (8 bodů) $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

2. **(8 bodů)** Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dokažte, že $det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A)det(B)$.

(6) Vlastní čísla, vlastní vektory a podobnost (48 bodů)

Deadline: 15. května 2023

1. **(15 bodů)** Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory následujícím maticím:
   (a) (5 bodů) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   (b) (5 bodů) $B = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$,
   (c) (5 bodů) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. **(4 body)** Najděte matici řádu 3 s jediným vlastním číslem.
3. **(3 body)** Nechť $A^k = 0$. Co lze říci o vlastních číslech?
4. **(10 bodů)** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárních zobrazení:
   (a) (4 body) $A \to A^T$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{2\times 2}$,
   (b) (6 bodů) $A \to \frac{1}{2}(A + A^T)$ na prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$.
5. **(4 body)** Nechť $A = S\Lambda S^{-1}$ je diagonalizační rozklad matice A. Určete vlastní vektory A^T.
6. **(4 body)** Najděte dva příklady nediagonalizovatelných matic řádu 2: singulární a regulární matici.
7. **(8 bodů)** Rozhodněte, zda matice A a B si jsou podobné, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(7) Positivní definitnost a bilineární formy (32 bodů)

1. **(10 bodů)** Ukažte 3 způsoby, že $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je positivně semidefinitní.

2. **(6 bodů)** Určete, pro které a je matice positivně definitní

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

3. **(6 body)** Najděte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}.$$

4. **(4 bod)** Ukažte, že pro každou bilineární formu b platí $b(u, 0) = b(0, u) = 0$.

5. **(6 bod)** Je $b(x, y) = x_1^2 + y_2^2 + 2x_2y_1$ bilineární forma?