

13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

Obraz a jádro

Cv. 13.1 Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

- (a) I_2 ,
- (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
- (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 13.2 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\text{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \text{Ker}(f^n)$.

Cv. 13.3 Bud' $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1, 0, 1) = (0, 1)^T, \quad f(0, 1, 1) = (-1, 0)^T, \quad f(1, 1, 0) = (1, 0)^T.$$

- (a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \text{Ker}(f)$.
- (b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\text{Ker}(f)$.

Cv. 13.4 Co je obrazem prostoru $\text{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x, \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x, \cos x\}$?

Cv. 13.5 Bud' $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U; f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U .

Zobrazení prosté a „na“

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

- (a) bylo prosté a „na“,
- (b) bylo prosté, ale nebylo „na“,
- (c) nebylo prosté, ale bylo „na“,
- (d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Cv. 13.7 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B :

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3: f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 13.8 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Cv. 13.9 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

- (a) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c, a + b, a)^T$,
 (b) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + c, a + b)^T$,
 (c) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, c, a + b)^T$,
 (d) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b)^T$.

Isomorfismus

Cv. 13.10 Rozhodněte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem \mathbb{R}^3 na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 13.11 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

- (a) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a \mathbb{R}^4 ,
 (b) \mathbb{R}^4 a \mathcal{P}^3 (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),
 (c) $\mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbb{R}^{n \times m}$,
 (d) \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} a \mathbb{C}^n nad \mathbb{C} ,
 (e) \mathbb{R}^2 a $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,
 (f) \mathbb{R}^4 a prostor lineárních zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cv. 13.12 Buď $f: U \rightarrow V$ isomorfismus a $x_1, \dots, x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li x_1, \dots, x_n lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \dots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.