

### 3. Ortogonální doplněk a projekce

#### Ortogonální doplněk

**Cv. 3.1** Pro vektorový prostor  $V$  určete  $V^\perp$ ,  $\{0\}^\perp$ ,  $\{\}$ .

**Cv. 3.2** Buď  $M, N \subseteq V$ . Ukažte

(a)  $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$ , ale ne naopak,

(b)  $(M \cup N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$ .

**Cv. 3.3** Najděte podprostor  $U \subseteq \mathbb{R}^5$  takový, že  $\dim U = \dim U^\perp$ .

**Cv. 3.4** Spočítejte ortogonální doplněk vektoru  $u = (1, 0, 0, -2)^T$  do podprostoru  $V = \text{span}\{v, w\} = \text{span}\{(1, 2, 4, 0)^T, (0, 1, 2, 1)^T\}$ .

**Cv. 3.5** Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Najděte  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\text{Ker}(A)$  a nakreslete je do obrázku.

**Cv. 3.6** Najděte bázi ortogonálního doplňku k prostoru

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

#### Ortogonální projekce

**Cv. 3.7** Uvažujme standardní skalární součin v  $\mathbb{R}^n$  a přímku  $p = \text{span}\{y\}$ .

(a) Najděte bod  $x'$  na přímce  $p$ , který je nejbližší bodu  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(b) Porovnejte velikost projekce  $x'$  a vektoru  $x$ .

(c) Sestavte matici kolmé projekce na přímku  $p$ .

(d) Najděte projekci vektoru  $x = (3, -2, 5)^T$  na přímku se směrnici  $y = (2, 1, 1)^T$ .

**Cv. 3.8** Určete ortogonální projekci  $p$  vektoru  $a = (2, 2, 1, 5)^T$  do podprostoru generovaného ortonormálními vektory

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T, \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)^T, \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T \right\}.$$

Dále určete souřadnice této projekce  $[p]_B$  vzhledem k bázi  $B$ .

**Cv. 3.9** Určete vzdálenost bodu  $A = [5, 5, 3, 3]$  od roviny  $\rho$  procházející počátkem a body  $B = [0, 1, -1, 0]$  a  $C = [4, -2, 2, -1]$ .

**Cv. 3.10** Při standardním skalárním součinu určete vzdálenost  $c \in \mathbb{R}^n$  od

(a) podprostoru  $a^T x = 0$ , kde  $o \neq a \in \mathbb{R}^n$ ,

(b) podprostoru  $a^T x = b$ , kde  $o \neq a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

**Cv. 3.11** Rozložte  $u = (3, 2, 6)^T$  na součet  $u = v + w$ , kde  $v \in V = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 1)^T\}$  a  $w \in V^\perp$ .

## Metoda nejmenších čtverců

**Cv. 3.12** Pomocí projekce najděte nejlepší přibližné řešení  $x'$  soustavy  $Ax = b$ , kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Všimněte si, že sloupce matice  $A$  jsou vzájemně kolmé.

Určete také velikost chyby  $\|Ax' - b\|$ .

Dostanete stejná řešení jako řešení soustavy  $A^T Ax = A^T b$ ?

**Cv. 3.13** Metodou nejmenších čtverců spočítejte přibližné řešení soustavy  $Ax = b$ , kde  $A = (1, \dots, 1)^T$  se skládá ze sloupce jedniček a  $b \in \mathbb{R}^n$ .

**Cv. 3.14** Hookův zákon vyjadřuje lineární úměrnost pružné deformace materiálu na použité síle. Následující tabulka obsahuje hodnoty průtahu pružiny (v palcích) v závislosti na síle/hmotnosti (v librách). Odhadněte koeficient úměrnosti.

síla $F$	5	7	8	10	12
průtah $\ell$	11,1	15,4	17,5	22	26,3