9. Vlastní čísla – Jordanova normální forma a symetrické matice

Jordanova normální forma

Cv. 9.1 Najděte

(a) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem (libovolným),

(b) matici řádu 3 s jediným vlastním vektorem $v = (1, 1, 1)^T$.

Cv. 9.2 V kolika Jordanových buňkách matice $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ je vlastní číslo 8, pokud víme, že $\operatorname{rank}(A - 8I_{16}) = 9$?

Cv. 9.3 Najděte Jordanovu normální formu matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.4 Určete, kolik je tříd ekvivalence podobnosti pro:

(a) matice řádu 4, které mají pouze vlastní číslo 7,

(b) matice řádu 3 s vlastními čísly 5 a 7.

Cv. 9.5 Najděte Jordanovu normální formu matice $J_n(\lambda)^T$.

Cv. 9.6 O kolik se maximálně zmenší hodnost matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ když ji umocníme A^2?

Symetrické matice

Cv. 9.7 Ukažte, že spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^T$, kde Λ je diagonální a Q ortogonální, existuje pouze pro symetrické matice.

Cv. 9.8 Najděte spektrální rozklad matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 9.9 Víme, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ má vlastní vektor $v = (1, 2)^T$. Dopočítejte druhý vlastní vektor.

Cv. 9.10 Dokažte, že pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má matice $A^T A$ všechna vlastní čísla nezáporná. Kdy budou kladná?

Cv. 9.11 (a) Dokažte z definice, že vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům symetrické matice jsou na sebe kolmé.

(b) S pomocí předchozího bodu dokažte větu o spektrálním rozkladu přímo pro symetrické matice s různými vlastními čísly.

10. Vlastní čísla – metody výpočtu, odhady, Markovovy řetězce

Markovovy řetězce a nezáporné matice

Cv. 10.1 Ve městě Žebrácká Lhota fungují tři lokální politické strany, a to Moderní Čechy (MČ), Mír pro Lidi (ML) a Malé Hnutí (MH). Volby se řídí následujícím pravidlem: Z voličů strany MČ volí opět tuto stranu 75 % jejich voličů, ale k ML přejde 5 % a k MH dokonce 20 %. Z voličů ML přejde k MČ rovných 20 % a k MH také 20 %. Nakonec, z voličů MH zůstane jen 80 %, zbytek se rovnoměrně rozdělí mezi MČ a ML. Jaké bude rozdělení podpory stran v místním zastupitelstvu za delší časový horizont?

Cv. 10.2 Difuze léčebné látky mezi dvěma buňkami probíhá podle pravidla: 50 % látky z první buňky přejde do druhé, ale jen 25 % látky z druhé buňky přejde do první. V jakém poměru se množství látky ustálí?

Cv. 10.3 Ukažte, že vlastnosti kladné matice z Perronovy věty obecně neplatí pro nezápornou matici. Konkrétně, najděte postupně takové matice $A \geq 0$, aby platily vlastnosti

(a) $\rho(A) = 0$,

(b) $\rho(A)$ je vícenásobné vlastní číslo,

(c) existuje vlastní číslo $\lambda \neq \rho(A)$ takové, že $|\lambda| = \rho(A)$.

Odhady a techniky z výpočetních metod

Cv. 10.4 Určete Gerschgorinovy disky pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a pomocí nich rozhodněte, zda má matice A aspoň dvě reálná vlastní čísla.

Cv. 10.5 Pomocí Gerschgorinových disků rozhodněte, zda je následující matice regulární:

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & -7 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Cv. 10.6 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 4.6 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda $(I_4 - A^{-1})^k \to 0$ pro $k \to \infty$.

Cv. 10.7 Nejprve spočítejte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a potom aplikujte větu o deflaci vlastního čísla na to největší vlastní číslo.

11. Positivně (semi-)definitní matice

Positivně definitní matice

Cv. 11.1 Otestujte positivní definitnost matic

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pomocí:

(a) rekuretního vzorce,

(b) Sylvestrova pravidla,

(c) Gaussovy eliminace.

Cv. 11.2 Otestujte positivní semidefinitnost resp. positivní definitnost následujících matic pomocí vlastních čísel:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cv. 11.3 Buď A blokově diagonální symetrická matice. Ukažte, že A je positivně definitní právě tehdy, když všechny bloky jsou positivně definitní.

Jak to bude s positivní semidefinitností?

Cv. 11.4 Najděte příklad matice ilustrující, že nefunguje přímočaré zobecnění na testování positivní semidefinitnosti pomocí rekurentního vzorečku, Sylvestrova kritéria pro positivní definitnost a Choleského rozkladu.

Positivně semidefinitní matice

Cv. 11.5 Ověřte positivní semidefinitnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a to všemi třemi způsoby (na základě tří ekvivalentních definic).

Cv. 11.6 Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou positivně definitní.

(a) Ukažte, že $A + B$ jsou také positivně definitní.

(b) Jak to bude se součtem positivně semidefinitních matic?

(c) Jak to bude se součtem positivně semidefinitní a positivně definitní matice?

(d) Jak to bude s násobkem positivně definitních matic?

Cv. 11.7 Najděte regulární matici, která je positivně semidefinitní, ale ne positivně definitní.

Cv. 11.8 Ukažte, že libovolná mocnina positivně semidefinitní matice je positivně semidefinitní matice.

Cv. 11.9 Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujme relaci $\preccurlyeq$ předpisem $A \preccurlyeq B$ pokud $B - A$ je positivně semidefinitní. Ukažte, že $\preccurlyeq$ je relace částečného uspořádání.

Cv. 11.10 Buď A positivně semidefinitní. Ukažte, že pokud $x^T Ax = 0$ platí pro nějaké $x \neq o$, potom $Ax = o$.

12. Positivně definitní matice – Choleského rozklad

Cv. 12.1 Otestujte positivní definitnost matice A pomocí Choleského rozkladu.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cv. 12.2 Nalezněte Choleského rozklad následujících matic, nebo zdůvodněte, že nejsou positivně definitní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Pomocí Choleského rozkladu invertujte matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.4 Pomocí Choleského rozkladu vyřešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

13. Bilineární a kvadratické formy

Cv. 13.1 Jsou následující zobrazení bilineární formou? Pokud ano, jde o symetrickou formu?

(a) $a\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $a(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$,
(b) $b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(x,y) = x_1y_2 + x_2$,
(c) $c\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $c(x,y) = x_1^2 + y_1^2 + 2x_2y_1$,
(d) $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definované $d(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_2y_2$,
(e) $e\colon \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definované $e(A,B) = AB$.

Cv. 13.2 Najděte matici bilineárních forem vzhledem ke kanonické bázi.

(a) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_3y_2$
(b) $b(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 5x_2y_3 + 5x_3y_2$

Cv. 13.3 Pro následující kvadratickou formu

$$f(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_2^2$$

nalezněte symetrickou bilineární formu $b(x,y)$, která ji indukuje a uveďte $b(x,y)$ v maticové reprezentaci.

Cv. 13.4 Najděte matici kvadratické formy

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

vzhledem ke kanonické bázi a vzhledem k bázi $B = \{(1,1,1)^T,\ (1,1,0)^T,\ (1,0,0)^T\}$. Použijte dva různé postupy: z definice a pomocí matice přechodu.

Cv. 13.5 Pro zobrazení $b\colon \mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}$ definované $b(p,q) = p(0)q(2)$ ukažte:

(a) b je bilineární forma,
(b) najděte matici formy vzhledem k bázi $B = \{1,\ 1+x,\ (1-x)^2\}$,
(c) vyčíslete $b(1-x, x^2-2x+2)$ dvěma různými postupy,
(d) najděte matici formy vzhledem k bázi $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ s využitím té staré.

Cv. 13.6 Jednoznačnost kvadratické formy.

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{T}^{n\times n}$ jsou symetrické a nechť $x^TAx = x^TBx$ platí pro všechna $x \in \mathbb{T}^n$. Rozhodněte, zda potom $A = B$.
(b) Rozhodněte, zda matice kvadratické formy vzhledem k dané bázi je jednoznačná.

Cv. 13.7 Buď V vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a nechť charakteristika tělesa $\mathbb{T}$ není 2.

(a) Ukažte, že bilineární formy a symetrické bilineární formy na prostoru V tvoří vektorové prostory a určete jejich dimenze.
(b) Ukažte, že kvadratické formy na prostoru V tvoří vektorový prostor a určete jeho dimenzi.

14. Kvadratické formy a Sylvestrův zákon setrvačnosti

Cv. 14.1 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.2 Diagonalizujte kvadratické formy s maticemi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a určete polární bázi, tj. bázi, vůči níž je matice formy diagonální.

Cv. 14.3 Uvažte relaci kongruence, kdy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou v relaci, pokud existuje regulární S taková, že $B = S^T AS$.

(a) Dokažte, že se jedná o relaci ekvivalence.

(b) Kolik má tříd ekvivalencí?

Cv. 14.4 Vyjádřete kvadratickou formu $f(x) = x^T Ax$ jako součet čtverců lineárních forem, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.5 Ukažte, že rovnice $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$ popisuje elipsu v $\mathbb{R}^2$ a zjistěte její charakteristiky (postupem z přednášky).