8 Normy mimo normu (30 bodů)

Na cvičeních jsme charakterizovali všechny skalární součiny $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ pomocí symetrických pozitivně definitních matic A jako $\boldsymbol{x}^\mathsf{T} A\boldsymbol{y}$. Také jsme zmínili, že každý skalární součin $\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle$ indukuje normu $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle}$. Norem je však mnohem více než skalárních součinů, neboť ne každá norma je spojena se skalárním součinem. V této úloze dokážeme úplnou charakterizaci norem v $\mathbb{R}^n$.

8.1 Definice normy

Připomeňme si nejprve definici normy. Norma $\|\cdot\|$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které splňuje tři podmínky:

(i) *Nezápornost:* pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ a pro $\boldsymbol{x} \neq 0$ dokonce $\|\boldsymbol{x}\| > 0$.
(ii) *Linearita:* pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$.
(iii) *Trojúhelníková nerovnost:* pro každé $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí, že $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Příklady norem jsou standardní norma

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{x},$$

A-norma $\|\boldsymbol{x}\|_A = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} A\boldsymbol{x}$ (kde A je symetrická pozitivně definitní matice) a ℓ_p norma

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

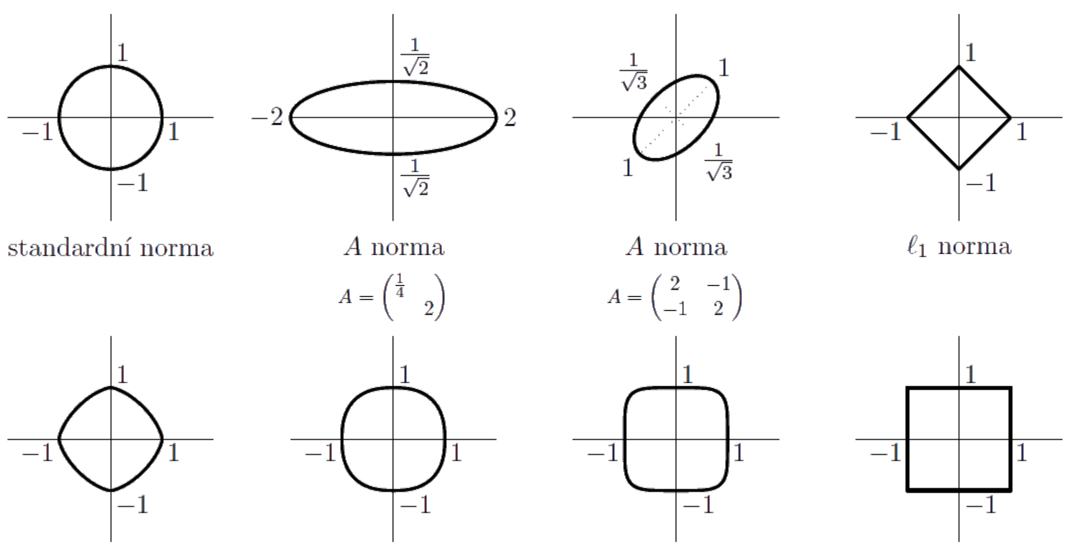
pro $p \in [1, \infty]$.

8.2 Sféry a koule

Mějme normu $\|\cdot\|$. Zaveďme následující značení:

$$S_r = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| = r\right\}, \qquad B_r = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\| \leq r\right\}.$$

Množina S_r je sféra o poloměru r, a B_r je koule o poloměru r. Na obrázku jsou sféry S_1 pro různé normy.



standardní norma; A norma, $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \\ & 2 \end{pmatrix}$; A norma, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; ℓ_1 norma

$\ell_{3/2}$ norma; $\ell_{5/2}$ norma; ℓ_5 norma; ℓ_∞ norma

Pokud zvolíme normu libovolného vektoru $\|\boldsymbol{x}\|$, vyplývá z linearity (i) také norma všech jeho násobků, tedy určili jsme normu pro celou přímku procházející počátkem. Pokud předepíšeme normu na každé z těchto přímek, je celá norma určená, ale musíme to udělat konzistentně, aby byla splněna trojúhelníková nerovnost. Jinými slovy norma je jednoznačně určena její jednotkovou sférou S_1.

Udělejme malou odbočku. Množina M se nazývá *konvexní*, pokud pro libovolné dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ patří úsečka $\{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} : t \in [0,1]\}$ do množiny M. Popišme paralelu s vektorovými podprostory. Vektorový podprostor je množina vektorů uzavřená na lineární kombinace. Pro konvexní množiny platí, že jsou uzavřené na konvexní kombinace. To jsou lineární kombinace $t_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + t_k\boldsymbol{x}_k$, které navíc splňují, že $t_1 + \cdots + t_k = 1$ a $t_i \geq 0$.

Úloha 8.1. Dokažte následující vlastnosti pro libovolnou normu $\|\cdot\|$:

(a) Počátek $\mathbf{0} \notin S_r$ pro libovolné $r > 0$.
(b) Množiny S_r a B_r jsou symetrické podle počátku, tedy $-S_r = S_r$ a $-B_r = B_r$.
(c) Množina B_r je konvexní.

Nyní přeformulujme vlastnost, že B_r je konvexní.

Úloha 8.2. Nechť $\|\cdot\|$ je libovolné zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které splňuje (i) a (ii). Dokažte, že B_r je konvexní pro libovolné $r > 0$, právě když

$$\|t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}\| \leq t\|\boldsymbol{x}\| + (1-t)\|\boldsymbol{y}\|,$$

kdykoliv $t \in [0,1]$.

8.3 Charakterizace všech norem

Nyní si ukážeme charakterizaci norem. Již víme, že každá norma definuje koule B_r, které jsou konvexní a symetrické podle počátku. Naopak libovolná jedna taková koule již jednoznačně určuje normu:

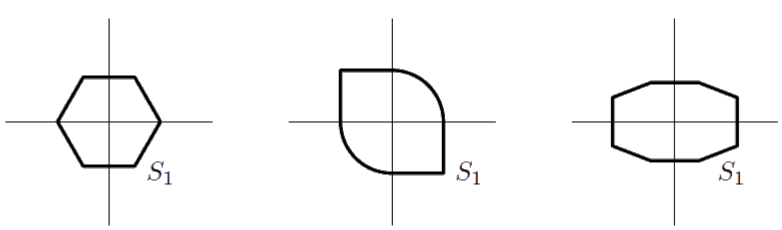
Úloha 8.3. Nechť B_1 je uzavřená omezená konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, symetrická podle počátku. Nechť S_1 je hranice B_1 a nechť $\mathbf{0} \notin S_1$. Definujme zobrazení $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ následovně:

$$\|\boldsymbol{x}\| = |\alpha|, \qquad \text{kde } \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y} \text{ a } \boldsymbol{y} \in S_1.$$

Dokažte, že $\|\cdot\|$ je norma.

Nápověda. Je snadné ověřit, že $\|\cdot\|$ splňuje vlastnosti (i) a (ii). S využitím úlohy 8.2, vhodným dosazením za t, lze získat trojúhelníkovou nerovnost (iii).

Ukázali jsme, že normy mohou být oproti skalárním součinům velice složité. Zakončeme tuto úlohu příkladem několika „divných“ norem, které nejdou popsat žádným ze vzorečků na začátku zadání úlohy.



9 Ekvivalence norem (30 bodů)

Na cvičeních jsme charakterizovali, za jakých podmínek konverguje lineární zobrazení $\boldsymbol{x} \to A\boldsymbol{x}$ k počátku souřadnicového systému v závislosti na hodnotách vlastních čísel matice A. Pro tento důkaz bylo zásadní pochopit, že pokud posloupnost konverguje k nule v jedné normě, poté konverguje k nule v libovolné jiné normě. Pro libovolnou dvojici norem ovšem existuje obecnější vztah, který nazýváme jejich ekvivalencí. Řekneme, že dvojice norem $\|\bullet\|_a$ a $\|\bullet\|_b$ je *ekvivalentní*, pokud existují reálná kladná $0 < c_1 \le c_2$ taková, že pro každé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_b \le \|\boldsymbol{x}\|_a \le c_2\|\boldsymbol{x}\|_b. \tag{$\spadesuit$}$$

Ekvivalenci norem budeme značit $\| \bullet \|_a \sim \| \bullet \|_b$.

V čem je tento vztah zajímavý? Pokud by $c_1 = c_2 = 1$, potom dostáváme dokonce rovnost norem, $\|\boldsymbol{x}\|_a = \|\boldsymbol{x}\|_b$. Ekvivalenci norem tedy můžeme chápat jako zeslabení vztahu rovnosti mezi normami.

I přes to, že se nejedná přímo o rovnost, může nám tento vztah usnadnit práci ve výpočtech. Pro ℓ_2-normu a ℓ_∞-normu se dá ukázat, že ekvivalence platí ve formě

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_\infty} \le \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_2} \le \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_\infty}.$$

Zatímco určení $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_\infty}$ je otázkou nalezení největší hodnoty vektoru $\boldsymbol{x}$ v absolutní hodnotě, výpočet $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}$ je složen z n násobení, $n-1$ sčítání a 1 odmocniny. Pokud nepotřebujeme znát hodnotu $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_2}$ přesně, je výhodnější ji aproximovat hodnotou $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_\infty}$.

Další oblastí, kde se dá ekvivalence norem využít je již zmíněné zkoumání asymtotického chování posloupností, kde ekvivalence *splyne* s rovností díky nekonečného přibližování posloupností.

Dokázat ekvivalenci norem ve tvaru ($\spadesuit$) by bylo poněkud náročné, my si proto důkaz rozdělíme do několika kroků, kdy jeden z nich bude vyžadovat znalost *Weierstrassovy věty* z matematické analýzy. V prvním kroku si ukážeme, že se v důkazu můžeme omezit pouze na $a = \ell_1$, tedy nahlédneme, že pokud jsou všechny normy ekvivalentní ℓ_1-normě, poté jsou ekvivalentní mezi sebou. Tomuto vztahu se říká také *tranzitivita* ekvivalence norem.

Úloha 9.1. Ukažte, že pokud $\| \bullet \|_a \sim \| \bullet \|_{\ell_1}$ a $\| \bullet \|_b \sim \| \bullet \|_{\ell_1}$, poté také $\| \bullet \|_a \sim \| \bullet \|_b$.

V sérii úloh *Normy mimo normu* jsme nahlédli, že každá norma je charakterizovatelná množinou obrazů vektorů $\boldsymbol{x}$, pro které platí, že $\|\boldsymbol{x}\| = 1$. V další úloze nahlédneme, že i ekvivalence norem je závislá pouze na této množině vektorů. Pokud se totiž omezíme na $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ s $\|\boldsymbol{x}\|_\ell = 1$, dostáváme

$$c_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_a \le c_2.$$

Úloha 9.2. Ukažte, že $\| \bullet \|_a \sim \| \bullet \|_{\ell_1}$ právě tehdy, když existující $c_2 \ge c_1 > 0$ taková, že $c_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_a \le c_2$ pro všechny $\boldsymbol{x}$ s $\|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} = 1$.

Větu o ekvivalenci norem jsme nyní zredukovali na existenci konstant c_1 a c_2. Abychom ukázali, že takové konstanty skutečně existují, mohli bychom postupovat následujícím způsobem. Na množině vektorů $\boldsymbol{x} \in S_1$, konkrétně na $S_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid \|\boldsymbol{x}\|_{\ell_1} = 1\}$, určíme rozsah hodnot $\|\boldsymbol{x}\|_a$ a následně zvolíme reálná čísla c_1 a c_2 tak, že $0 < c_1 \le \|\boldsymbol{x}\|_a \le c_2$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in S_1$. Uvědomme si, že tento postup by mohl selhat. Pokud by totiž existovala nekonečná posloupnost vektorů $\boldsymbol{x}_i \in S_1$, jejichž hodnoty by se blížili k 0 s libovolnou přesností, nemohli bychom zvolit $c_1 > 0$. Obdobně, pokud by existovala nekonečná posloupnost $\boldsymbol{y}_i \in S_1$, která by rostla nad všechny meze, nemohli bychom zvolit c_2.

V tuto chvíli nastupuje na scénu *Weierstrassova věta* o nabývání minima a maxima. Ta tvrdí, že **pokud je funkce $f(x)$ spojitá na kompaktní množině, poté je (na této množině) omezená a nabývá se na ní svého minima a maxima.**

Pokud dokážeme o normě $\| \bullet \|_a$, že je spojitá na S_1 a u množiny S_1 nahlédneme její kompaktnost, budeme vědět, že existují

$$m = \min_{\boldsymbol{u}:\|\boldsymbol{u}\|_{\ell_1}=1} \|\boldsymbol{u}\|_a \quad \text{a} \quad M = \max_{\boldsymbol{u}:\|u\|_{\ell_1}=1} \|\boldsymbol{u}\|_a.$$

To už nám zajistí existenci konstant c_1 a c_2.

Úloha 9.3. Ukažte, že pokud existuje minimum a maximum vzhledem k $\| \bullet \|_a$ na množina S_1, poté existují $c_2 \geq c_1 > 0$ takové, že $c_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_a \leq c_2$.

Zbývá rozmyslet, že platí předpoklady Weierstrassovy věty. Tady si už nevystačíme se standardním pojmem spojitosti funkce a kompaktnosti množin, protože ty uvažují euklidovskou ℓ_2-normu. Podívejme se na standardní definici spojitosti funkce jedné proměnná. Pro funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí, že je *spojitá*, pokud pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Intuitivně nám spojitost říká, že pokud x a y nejsou příliš *daleko* od sebe, poté také jejich funkční hodnoty nemohou být daleko od sebe. Pojmem formalizujícím vzdálenost je takzvaná *metrika*. Standardní metrikou standardního vektorového prostoru bývá metrika indukovaná euklidovskou normou, tj. funkce, která dvojici vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ přiřadí hodnotu $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_2}$. Všimněme si, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ je využití euklidovské metriky v souladu s naší definicí, neboť platí, že $\|x - y\|_{\ell_2} = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$. Spojitost funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je proto možné definovat tak, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_2} < \delta \implies |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \epsilon.$$

Protože libovolná norma indukuje metriku, můžeme v definici spojitosti ℓ_2-normu nahradit libovolnou jinou normou. To bude pro nás důležité vzhledem k druhému předpokladu Weierstrassovy věty.

Kompaktnost množiny se vztahuje k *topologii* prostoru, tedy jeho struktuře zachycující pojem *blízkosti* množin. Aby byly splněny předpoklady Weierstrassovy věty, musí být topologie, v rámci která zkoumáme kompaktnost množiny, indukována metrikou, kterou uvažujeme v definici spojitosti. Pokud bychom si zvolili euklidovskou metriku, dá se ukázat, že množina S_1 v ní není kompaktní. Naopak, není těžké nahlédnout, že v rámci topologie indukované ℓ_1-normou množina S_1 kompaktní je. My důkaz přeskočíme, neboť nám k tomu chybí patřičné nástroje.

Na samotný závěr využijeme faktu, že spojitost funkce na kompaktní množině plyne z její spojitosti, což je taktéž základní výsledek matematické analýzy.

Úloha 9.4. Ukažte, že $\| \bullet \|_a$ je spojitá vzhledem k metrice indukované ℓ_1-normou, tj. pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ taková, že

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_1} < \delta \implies |\|\boldsymbol{x}\|_a - \|\boldsymbol{y}\|_a| < \epsilon.$$

Nápověda. Podstatné je v tomto případě rozmyslet, v jakém vztahu jsou $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_a$ a $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_1}$. Pokud vyjádříme $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i$ a $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{e}_i$ jako lineární kombinace kanonické báze, můžeme vyjádřit, díky trojúhelníkové nerovnosti, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_a = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \cdot \|e_i\|_a$ a obdobně vyjádřit $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i|$. Ve chvíli, kdy máte pochopený vztah mezi oběma normami vektoru $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, je možné ho využít pro určení δ. K tomu je ještě dobré si uvědomit, že platí vztah $|\|\boldsymbol{x}\|_a - \|\boldsymbol{y}\|_a| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_a$.

10 Determinant je multilineární alternující forma (40 bodů)

Těmito slovy by vám algebraik pravděpodobně popsal determinant. Definice je na jednu stranu krátká a jednoduchá, na druhou stranu člověku neznalému těchto pojmů neřekne absolutně nic. Naším cílem v této úloze bude si tuto alternativní definici představit a ukázat ekvivalenci s typickou definicí determinantu pomocí formule

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}. \tag{$\clubsuit$}$$

Z formule vyvodíme (s trochou práce) vlastnosti determinantu, pomocí kterých ho můžeme spočítat. Na druhou stranu vůbec není vidět, kde se tato formule vzala a proč zrovna takhle je zajímavá; což bude mnohem zřejmější z algebraického přístupu pomocí multilineárních forem.

Jednotlivé vlastnosti si proto budeme ilustrovat na maticích 2×2, kde můžeme snadno zkontrolovat, že je determinant definovaný ($\clubsuit$) splňuje:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

10.1 Definice determinantu pomocí vlastností

Zkusíme determinant nadefinovat pomocí vlastností, které splňuje. Pro jednoduchost budeme pracovat nad tělesem reálných čísel.[1] Determinant det je libovolné zobrazení

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R},$$

které splňuje následující tři vlastnosti. Tedy determinant přiřazuje čtvercovým maticím reálná čísla. Formálně máme jednu definici determinantu pro každou velikost čtvercové matice, což budeme ignorovat. Tři vlastnosti jsou tyto:

(1) Determinant je lineárně závislý na prvním řádku matice:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \gamma \cdot a & \gamma \cdot b \\ c & d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Tedy násobky řádků můžeme z determinantu vytknout a podobně můžeme rozdělením řádku rozdělit jeden determinant na součet dvou determinantů. Pozor, rozhodně z toho nevyplývá, že $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$, můžeme aplikovat pouze na jeden řádek naráz. Této vlastnosti se říká *linearita prvního řádku* a drobnou úpravou (1) na (1') dostaneme slibovanou *multilinearitu*.

(2) Determinant je *alternující*; prohození dvou řádků matice změní znaménko determinantu.

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(3) Determinant jednotkové matice $\det(I_n)$ je roven jedné.

$$\begin{vmatrix} 1 & \\ & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \dots$$

Podle vlastností (1) a (2) je determinant překvapivě určený jednoznačně až na přeškálování. Poslední vlastnost fixuje hodnotu determinantu nějaké matice.

V případě našeho odvození se ukazují dvě potíže algebraického přístupu. Předně ani nevíme, jestli existuje nějaké funkce splňující vlastnosti (1) až (3) (což víme podle znalosti formule ($\clubsuit$), kterou však nebudeme chtít používat). Také zatím nevíme, zda je determinant určený jednoznačně.

[1] Definici determinantu lze samozřejmě zobecnit i pro ostatní tělesa. Jediný rozdíl je, že nad tělesem charakteristiky dva (např. $\mathbb{Z}_2$) se uvažuje místo vlastnosti (2) vlastnost (4).

10.2 Odvození dalších vlastností

Začneme tím, že z vlastností (1) až (3) odvodíme další základní vlastnosti determinantu.

Úloha 10.1. Dokažte následující vlastnosti (1') a (4) až (10).

Poznámka. V jejich důkazu nemůžete používat nic jiného než vlastností (1) až (3) a vlastností již dokázaných. Pokud se nepodaří některou vlastnost dokázat, můžete ji přeskočit a dále používat (čímž pochopitelně dostanete méně bodů).

(1') První řádek není v ničem speciální, determinant je lineárně závislý na libovolném řádku matice. Této vlastnosti se říká *multilinearita.*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+c' & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ \gamma \cdot c & \gamma \cdot d \end{vmatrix} = \gamma \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(4) Pokud má determinant nulový řádek, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

(5) Pokud má determinant dva řádky stejné, je roven nule.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

(6) Přičtení libovolného násobku jednoho řádku k jinému nemění determinant.

$$\begin{vmatrix} a+\gamma \cdot c & b+\gamma \cdot d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(7) Determinant trojúhelníkové matice T (horní či dolní) je roven součinu prvků na hlavní diagonále; $\det(T) = t_{1,1} \cdot t_{2,2} \cdots t_{n,n}$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad.$$

(8) Determinant umožňuje testovat regularitu. Je nenulový právě tehdy, když je matice regulární.

Nápověda. Aplikujte Gaussovu eliminaci, která nemění determinant (nebo alespoň nemění nenulovost). Jak dopadne, pokud je matice regulární? Jaký výsledek dostaneme pro singulární matici?

Poznámka. Z výše uvedených vlastností již vyplývá jednoznačnost determinantu. Totiž aplikováním Gaussovy eliminace získáme, že determinant je (až na znaménko) součin pivotů. Pro daný postup Gaussovy eliminace proto vždy získáme stejné číslo a determinant musí být určený jednoznačně. Protože však Gaussovu eliminaci můžeme provádět různým způsobem, není jasné, zda vždy dostaneme stejné číslo, a tedy jestli je determinant vůbec *dobře zadefinovaný.* Mohlo by se ještě stát, že nebude existovat žádná funkce splňující vlastnosti (1) až (3).

(9) Determinant součinu dvou matic je součin jejich determinantů, tedy platí $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} = (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) =$$
$$= (ad-bc)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Nápověda. Lze například postupovat následujícím trikem. Případ, kdy je B singulární, vyřešíme zvlášť. Pokud je B regulární, definujme zobrazení d:

$$d(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Potřebujeme pouze dokázat, že zobrazení d splňuje vlastnosti (1) až (3). Potom z jednoznačnosti determinantu dostaneme, že $d = \det$ (a teoreticky by ani jedna z funkcí nemusela vůbec existovat).

Matice P_π je permutační (odvozená od permutace π), pokud má v každém řádku a sloupci obsahuje právě jednu jedničku a na ostatních pozicích nuly; podrobněji v úloze 2 z první série.

Úloha 10.2. Jak vypadá determinant permutační matice P_π? Zkuste dokázat jak pomocí vlastností, tak pomocí definice ($\clubsuit$).

Zbývá ukázat poslední vlastnost (10) a tím bude náš seznam vlastností úplný.

(10) Determinant matice i její transpozice je stejný, tedy $\det A = \det A^\mathsf{T}$.

Nápověda. Problém je, že všechny předchozí vlastnosti determinantu hovoří o řádcích matice. Důkaz však lze založit na LDU dekompozici, kterou jsme si ukazovali na cvičení. Singulární případ A vyřešíme zvlášť. Pro každou regulární matici A platí

$$PA = LDU,$$

kde P je vhodná permutační matice, L je dolní a U je horní trojúhelníková matice s jednotkovou diagonálou a D je diagonální matice obsahující pivoty. Důkaz se provede aplikováním transpozice na LDU dekompozici a porovnáním determinantů.

Poslední vlastnost (10) prakticky zdvojuje seznam vlastností, které o determinantu známe. Získáváme podobné vlastnosti o sloupeččích matice: Determinant je lineárně závislý na libovolném sloupečku; pokud je libovolný sloupeček nulový nebo jsou dva sloupečky stejné, je determinant nulový; ...

10.3 Ekvivalence s definicí pomocí formule ($\clubsuit$)

Zbývá dokázat, že determinant definovaný vlastnostmi (1) až (3) splňuje formuli ($\clubsuit$).

Úloha 10.3. Dokažte, že determinant definovaný (1) až (3) je ekvivalentní s definicí ($\clubsuit$).

Nápověda. Rozdělíme výpočet jednoho determinantu na výpočet n^n determinantů. Podle vlastnosti (1) rozdělíme determinant na n determinantů, každý z nich obsahuje pouze jedno číslo z prvního řádku a na zbývajících pozicích nuly:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Stejně tak rozdělíme i ostatní řádky, každý na n dalších determinantů:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

Tak získáme n^n matic (každá obsahuje právě jeden koeficient původní matice v každém řádku), jejichž determinanty budou triviální. Část z nich bude nulových a ty zbývající budou členy sumy ($\clubsuit$). Například pro výše uvedený determinant dostáváme

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 + ad - bc + 0 = ad - bc.$$

11 Hadamardovy matice dají nejvíce! (30 bodů)

V této úloze se budeme zabývat speciálními čtvercovými maticemi, které se nazývají Hadamardovy. Mají překvapivě zajímavou kombinatorickou strukturu a používají se například v teorii samoopravných kódu nebo ve statistice. Jeden ze základních otevřených problémů je, pro které velikosti vůbec existují. Ukážeme si konstrukci pro velikosti ve tvaru 2^k a také překvapivou souvislost Hadamardových matic s determinantem.

Definice. Matice $H \in \{-1,1\}^{n\times n}$ se nazývá *Hadamardova*, pokud platí

$$HH^\mathsf{T} = H^\mathsf{T}H = nI_n.$$

Tedy Hadamardova matice je tvořená ± 1 a má ortogonální řádky a sloupce.

Například Hadamardova matice řádu dva vypadá takto: $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$. Nejprve vypozorujme:

Úloha 11.1. Nechť H je Hadamardova matice $n \times n$. Potom $n = 1, 2$ nebo je dělitelné čtyřmi.

Nápověda. Nejprve zkuste dokázat dělitelnost dvěma (s výjimkou $n = 1$). Pokud H je Hadamardova matice, můžeme s ní provádět určité úpravy, které „hadamardovost“ zachovávají.

Základní hypotéza Hadamardových matic říká, že Hadamardova matice existuje pro každé $n = 4k$. Je známo pouze několik různých konstrukcí, z nichž dostaneme Hadamardovy matice pouze pro některé řády.[2] Ukážeme si Sylvesterovu konstrukci pro $n = 2^k$. Pokud vymyslíte či nastudujete nějakou jinou konstrukci a naučíte mě ji, můžete dostat bonusové body.

Úloha 11.2. Dokažte, že existuje Hadamardova matice H_n velikosti $n \times n$ pro každé $n = 2^k$.

Nápověda. Zkuste objevit induktivní konstrukci, která vytvoří H_{2n} nějakým způsobem z matice H_n. Také můžete využít Kroneckerův součin matic, který se definuje takto: Nechť A je matice $m \times n$ a B je matice $p \times q$. Kroneckerův součin $A \otimes B$ je matice $mp \times nq$ tvořená $m \times n$ bloky velikosti $p \times q$ tak, že blok na souřadnicích (i,j) je matice $a_{i,j}B$. Jestliže A a B jsou Hadamardovy matice, jak vypadá $A \otimes B$? Příklad součinu $A \otimes B$:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & \\ 2 & -1\end{pmatrix}, \qquad \text{potom} \qquad A \otimes B = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & 2 & & 3 & \\ 2 & -1 & 4 & -2 & 6 & -3 \\ \hline 4 & & 5 & & 6 & \\ 8 & -4 & 10 & -5 & 12 & -6 \end{array}\right).$$

Na závěr dokažme, že Hadamardovy matice jsou extremální matice pro následující větu. Objevil ji sám Hadamard v roce 1893, čímž započal zkoumání Hadamardových matic.

Úloha 11.3. Mějme matici A velikosti $n \times n$, že $|a_{i,j}| \le 1$ ve všech pozicích (i,j). Potom platí $|\det(A)| \le n^{n/2}$ a rovnosti se nabývá právě tehdy, když A je Hadamardova matice.

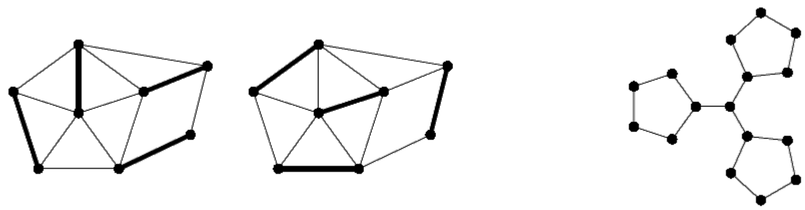
Nápověda. Využijte toho, že absolutní hodnota determinantu odpovídá objemu rovnoběžnostěnu určeného řádky matice. Pokud máme rovnoběžnostěn určený vektory $\boldsymbol{x}_{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}_{(n)}$, jaký je jeho maximální objem v závislosti na normách $\|\boldsymbol{x}_{(1)}\|, \dots, \|\boldsymbol{x}_{(n)}\|$? A kdy se tohoto maxima přesně nabývá?

12 Determinují determinanty perfektní párování? (25 bodů)

V této úloze si ukážeme jednu kombinatorickou aplikaci determinantů. *Párování* P je množina hran, které nesdílejí koncové vrcholy. Tedy žádný vrchol grafu je incidenční s nejvýše jednou hranou z P. Párování je *perfektní*, pokud obsahuje $\frac{n}{2}$ hran, kde n je počet vrcholů grafu; tedy

[2] Otevřené řády do dvou tisíc jsou 668, 716, 892, 1004, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948 a 1964. Například matice řádu 428 byla zkonstruována teprve nedávno, v IPM v Tehránu v roce 2005.

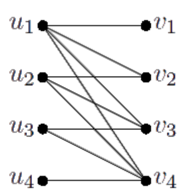
každý vrchol je spárovaný s nějakým jiným. Pochopitelně ne každý graf obsahuje perfektní párovaní. Minimálně musí být počet vrcholů sudý, aby vůbec perfektní párování mohlo existovat. Na obrázku jsou pro graf vlevo vyznačena dvě různá perfektní párování, pro graf vpravo žádné perfektní párování neexistuje. (Proč?)



Pro jednoduchost se v této úloze zaměříme na bipartitní grafy. Mějme bipartitní graf G s dvěma partitami $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ a $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Ten lze popsat incidenční matici partit I_G velikosti $m \times n$ takovou, že

$$(I_G)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{pokud } u_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{pokud } u_i v_j \notin E(G). \end{cases}$$

Například pro níže uvedený graf G dostaneme následující matici I_G:



$$I_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Aby perfektní párování vůbec mohlo existovat, musí platit $|U| = |V|$, tedy matice I_G musí být čtvercová. Vaším úkolem je zjistit, jaký je vztah mezi $\det(I_G)$ a existencí perfektního párování.

Úloha 12.1. Dokažte, že pokud $\det(I_G) \neq 0$, graf G má nutně perfektní párování.

Úloha 12.2. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí i obrácená implikace: Pokud G obsahuje perfektní párování, potom $\det(I_G) \neq 0$. Je nějaký vztah mezi hodnotou determinantu a počtem různých perfektních párování?

Poznámka. Výše uvedený vztah lze zobecnit i na nebipartitní grafy, i když je to maličko komplikovanější a souvisí to s počtem cyklických pokrytí grafu. Přesný počet perfektních párování bipartitního grafu je roven *permanentu* $\operatorname{perm}(I_G)$, což je „determinant bez znaménka“:

$$\operatorname{perm}(A) = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

Určit počet perfektních párování i pro bipartitní graf (a tedy i výpočet permanentu matic obsahujících pouze nuly a jedničky) je #P-úplný problém, což znamená, že pro to (pravděpodobně) neexistuje polynomiální algoritmus.[3] Zatímco determinant můžeme spočítat efektivně, drobná změna v definici na permanent způsobí, že se tato formule efektivně určit nedá.

[3] Třída #P obsahuje počítací verze problémů z NP. Například problém existence hamiltonovské kružnice patří do NP a příslušný problém určení počtu různých hamiltonovských kružnic patří do #P. Pochopitelně každý problém z #P je alespoň tak těžký jako příslušný rozhodovací problém v NP. Problém je #P-úplný, pokud je to nejtěžší problém v #P.

13 Po stopách matic (25 bodů)

Pro čtvercovou matici A definujme její *stopu* $\mathrm{tr}(A)$ jako součet prvků na diagonále:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Na přednášce jste si pomocí charakteristického polynomu dokázali, že stopa $\mathrm{tr}(A)$ je rovna součtu vlastních čísel A. V této úloze ukážeme alternativní důkaz spolu s dalšími vlastnostmi stopy.

Je snadné nahlédnout, že stopa je lineární v koeficientech matice, tedy

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \qquad \text{a} \qquad \mathrm{tr}(cA) = c \cdot \mathrm{tr}(A).$$

Stopa se nechová vůči součinu matic tak pěkně jako determinant, obecně $\mathrm{tr}(AB)$ je zcela rozdílná od $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. Pro stopu však platí následující *cyklická vlastnost*:

Úloha 13.1. Dokažte pro libovolné matice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, že platí

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA). \tag{1}$$

Poznamenejme, že také existuje velice hezká formule pro $\mathrm{tr}(C^{\mathsf{T}}D)$ v řeči Hadamardova maticového součinu $\circ$, což je součin po složkách. Nyní už je snadné dokázat, že maticová podobnost zachovává stopu a že stopa je rovna součtu vlastních čísel. Tedy stopa je vlastností lineárního zobrazení a nezáleží na konkrétní volbě báze.

Úloha 13.2. Dokažte, že maticová podobnost nemění stopu, tedy $\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

Úloha 13.3. Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Dokažte, že

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

Nakonec si ukážeme alternativní definici stopy, podobně jako jsme v úloze 8, kdy jsme charakterizovali determinant pomocí vlastností. Překvapivě výše popsané vlastnosti určují stopu skoro jednoznačně. Aby byl popis jednoznačný, musíme zvolit hodnotu stopy pro jednu z matic, která ji má nenulovou.

Úloha 13.4. Nechť $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení, které splňuje vlastnost (1) a pro které $f(I) = n$. Dokažte, že potom $f = \mathrm{tr}$.

Nápověda. Stačí pochopit chování f pro matice $E_{(i,j)}$, které mají všechny koeficienty nulové a pouze jediný koeficient na pozici (i,j) roven jedné. To jsou vlastně vektory kanonické báze pro prostor čtvercových matic $\mathbb{R}^{n\times n}$. Stačí tedy ukázat, že $f(E_{(i,j)}) = \mathrm{tr}(E_{(i,j)})$.

Existuje pro stopu i nějaká pěkná geometrická motivace? O determinantu jsme si na cvičení řekli, že počítá transformaci objemu lineárního zobrazení. Překvapivě stopa souvisí s touto motivací, neboť popisuje derivaci determinantu, tedy lokální změnu objemu v nějaké sérii transformací. Přesněji vztah popisuje Jacobiho formule.

Mějme nějakou sérii matic $A(x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, a každý z koeficientů je nějaká derivovatelná funkce x. Například nechť

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

je série matic 2×2 reprezentující rotace v rovině. Jacobiho formule říká, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \det A(x) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Adj}(A) \cdot \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right),$$

kde poslední derivace je po členech a $\mathrm{Adj}(A)$ je adjungovaná matice, jejíž koeficienty jsou tvořené determinanty s vyškrtnutým i-tým řádkem a j-tým sloupcem (s příslušným znaménkem).

Snadným výpočtem pro $R(\varphi)$ zjistíme, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \det R(\varphi) = 0$. To dává smysl, neboť všechny matice rotace jsou ortogonální a mají stejný determinant.