Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý

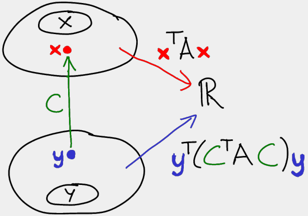
kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

May 22, 2023

Sylvesterova věta o setrvačnosti a minimaxová věta

- **Cíl: Pochopení struktury libovolné kvadratické formy $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$**
- pro A diagonální snadné
- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 =$
  - $y_1 = (x_1 + x_2)$
  - $y_2 = (x_1 - x_2)$
- $= \frac{1}{2}{y_1}^2 + \frac{3}{2}{y_2}^2 = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$
- **vhodnou substitucí jsme převedli na diagonální formu**

- $\mathbf{x} = C\mathbf{y}$
- C ... regulární,
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (C\mathbf{y})A(C\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(C^T AC)\mathbf{y}$
- A a $C^T AC$ reprezentují **stejné kvadratické formy vůči různým bázím**



Kongruence

A je ***kongruentní*** s B, značeno $A \sim B$, pokud $\exists C$ regulární:

$$B = C^T AC.$$

O vztahu kongruence a podobnosti matic

Kongruence $B = C^T A C$

- různé kvadratické formy
- charakterizace pomocí **Sylvestrovy věty o setrvačnosti**

Podobnost $B = S^{-1} A S$

- různá lineární zobrazení
- charakterizace pomocí analýzy velikosti vlastních čísel

Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

- značíme **signatura matice** (n_+, n_-, n_0)

Důkaz:

1. A, B mají stejnou signaturu $\implies A \sim B$
   - Stačí $A \sim D$
   - $\begin{pmatrix} \overbrace{1 \; \ddots \; 1}^{n_+} & & \\ & \overbrace{-1 \; \ddots \; -1}^{n_-} & \\ & & \overbrace{0 \; \ddots \; 0}^{n_0} \end{pmatrix}$ ... D
2. $A \sim B = C^T A C \implies$ mají stejnou signaturu
   - topologickým důkazem

Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

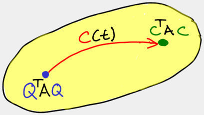
Důkaz:

1. A, B mají stejnou signaturu $\implies A \sim B$
   - Stačí $A \sim D$
   - $\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}}^{n_+} && \\ & \overbrace{\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}}^{n_-} & \\ && \overbrace{\begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix}}^{n_0} \end{pmatrix}$ ... D
   - $A = Q\Lambda Q^T$ ... spektrální rozklad
     - seřadíme pozitivní, negativní, nulová vlastní čísla
   - Jak dostat D z Λ?
   - $(\sqrt{\Lambda})_{ii} = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|} & \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \lambda_i = 0 \end{cases}$
     - $\sqrt{\Lambda} D \sqrt{\Lambda} = \Lambda$
   - $A = (Q\sqrt{\Lambda}) D (\sqrt{\Lambda}^T Q^T)$

Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

Důkaz: $A \sim B = C^T AC \implies$ mají stejnou signaturu

- A ... regulární
  - jinak $A + \epsilon I$, kde $\epsilon \to 0$
- Q ... ortogonální
- A a $Q^T AQ$ mají stejná vlastní čísla
- uvážíme spojitou transformaci z $Q^T AQ$ na $C^T AC$
- $C(t) = tC + (1 - t)Q$, $t \in [0, 1]$
  - $C(0) = Q$, $C(1) = C$
- 

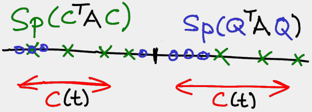
Sylvestrova věta o setrvačnosti

Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

Důkaz: $A \sim B = C^T A C \implies$ mají stejnou signaturu

- **klíčové:** vlastní čísla $C(t)^T A C(t)$ se mění spojitě s t
- pokud $C(t)$ regulární pro $\forall t \in [0, 1]$
- $\implies C(t)^T A C(t)$ regulární pro $\forall t \in [0, 1]$
  - $\implies$ vlastní čísla jsou nenulová
  - $\implies$ ze spojitosti nemohou změnit znaménko



- $Q^T A Q$ a $C^T A C$ mají stejnou signaturu
- A a $Q^T A Q$ mají stejná vlastní čísla
- $\implies A$ a $C^T A C$ stejnou signaturu

Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

Důkaz: $A \sim B = C^T AC \implies$ mají stejnou signaturu

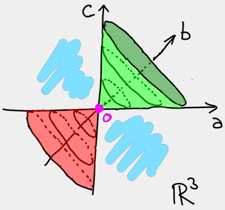
- **klíčové:** Jak zajistit, že $C(t)$ je vždy regulární?
  - můžeme pouze volit Q
- zvolíme $C = QR$ ... QR rozklad
  - R je horní trojúhelníková s kladnou diagonálou
- $C(t) = tQR + (1-t)Q = Q(tR + (1-t)I)$
  - Q ... regulární
  - $tR + (1-t)I$ ... regulární
    - konvexní kombinace horních trojúhelníkových matic s kladnou diagonálou
    - $\implies$ kladná diagonála
- $C(t)$ je regulární pro $\forall t \in [0, 1]$

Důsledky Sylvestrovy věty

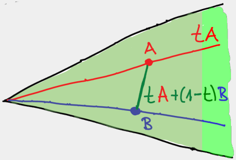
Sylvestrova věta o setrvačnosti

$A \sim B$, právě když mají stejně kladných, záporných a nulových vlastních čísel.

- Kolik je tříd kongruence pro matice $n \times n$?
  - *"přihrádkový" argument* $\implies \binom{n+2}{2}$
- $n = 2 \implies 6$ tříd
- $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

- symetrické matice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$
- reprezentace pomocí $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- Jak vypadají SPD matice?
  1. $a > 0, c > 0$
     - jeden *ortant* (čtvrtprostor)
  2. $\det(A) = ac - b^2 > 0$
     - lze více geometricky interpretovat, vynecháme
- 

  - *SPD*, *SND*, *ID*

- 

SPD tvoří kužel

Nechť A, B jsou SPD. Potom

1. tA je SPD pro libovolné $t > 0$
2. $tA - (1 - t)B$ je SPD, kde $t \in [0, 1]$

Důkaz:

- snadno z definice, vynecháme

Věta o proplétání vlastních čísel

Nechť A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a sloupce. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla A a $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{n-1}$ vlastní čísla B. Potom: $\lambda_i \geq \sigma_i \geq \lambda_{i+1}$.

- symetrická matice A
  - s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$
  - s vlastními vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$
- $\lambda_i = \mathbf{y}_i{}^T A \mathbf{y}_i$
- $R_A(x) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \neq \mathrm{o}$ … Rayleyho kvocient
  - chování kvadratické formy na jednotkové sféře
- $\mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$
- $R_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum \alpha_i{}^2 \lambda_i \mathbf{y}_i{}^T \mathbf{y}_i}{\sum \alpha_i{}^2 \mathbf{y}_i{}^T \mathbf{y}_i} = \frac{\sum \alpha_i{}^2 \lambda_i}{\sum \alpha_i{}^2}$

- symetrická matice A
  - s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$
  - s vlastními vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$
- $\lambda_i = \mathbf{y}_i{}^T A \mathbf{y}_i$
- $R_A(x) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ ... Rayleyho kvocient
  - chování kvadratické formy na jednotkové sféře
- $\mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$
- $R_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum \alpha_i{}^2 \lambda_i \mathbf{y}_i{}^T \mathbf{y}_i}{\sum \alpha_i{}^2 \mathbf{y}_i{}^T \mathbf{y}_i} = \frac{\sum \alpha_i{}^2 \lambda_i}{\sum \alpha_i{}^2}$

O Rayleyho kvocientech

$\max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_1$ a $\min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_n$

- $R_A(x) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ ... Rayleyho kvocient
  - chování kvadratické formy na jednotkové sféře
- $\mathbf{x} = \sum \alpha_i \mathbf{y}_i$
- $R_A(\mathbf{x}) = \frac{\sum {\alpha_i}^2 \lambda_i {\mathbf{y}_i}^T \mathbf{y}_i}{\sum {\alpha_i}^2 {\mathbf{y}_i}^T \mathbf{y}_i} = \frac{\sum {\alpha_i}^2 \lambda_i}{\sum {\alpha_i}^2}$

O Rayleyho kvocientech

$\max\limits_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_1$ a $\min\limits_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_n$

Důkaz:

- $\lambda_n = \lambda_n \frac{\sum {\alpha_i}^2}{\sum {\alpha_i}^2} \leq \frac{\sum {\alpha_i}^2 \lambda_i}{\sum {\alpha_n}^2} \leq \frac{\sum {\alpha_i}^2 \lambda_i}{\sum {\alpha_i}^2} \leq \frac{\sum {\alpha_i}^2 \lambda_1}{\sum {\alpha_i}^2} \leq \lambda_1 \frac{\sum {\alpha_i}^2}{\sum {\alpha_i}^2} = \lambda_1$
- $\alpha_1 = 1$ se nabyde λ_1
- $\alpha_n = 1$ se nabyde λ_n

Každé vlastní číslo λ_k lze popsat podobným způsobem

Courant-Fischerova minimaxová věta

Nechť A je symetrická matice. Potom

$$\lambda_k = \max_{\substack{U_k:\\ \dim(U_k)=k}} \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in U_k} R_A(\mathbf{x}) = \min_{\substack{V_k:\\ \dim(V_k)=n-k+1}} \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in V_k} R_A(\mathbf{x}).$$

Důkaz (první rovnosti):

1. " $\geq \lambda_k$"
   - zvolme $U_k = \langle \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \rangle$
   - $\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in U_k} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_k$
2. " $\leq \lambda_k$"

Každé vlastní číslo λ_k lze popsat podobným způsobem

Courant-Fischerova minimaxová věta

Nechť A je symetrická matice. Potom

$$\lambda_k = \max_{\substack{U_k: \\ \dim(U_k)=k}} \min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in U_k} R_A(\mathbf{x}) = \min_{\substack{V_k: \\ \dim(V_k)=n-k+1}} \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in V_k} R_A(\mathbf{x}).$$

Důkaz (první rovnosti):

1. "$\geq \lambda_k$"
2. "$\leq \lambda_k$"
   - U_k libovolný podprostor dimenze k
   - $V_k = \langle \mathbf{y}_k, \ldots, \mathbf{y}_n \rangle$ dimenze $n-k+1$
   - existuje $\mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in U_k \cap V_k$
   - $\min_{\mathbf{x}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{x}\in U_k} R_A(\mathbf{x}) \leq R_A(\mathbf{x})$
   - zároveň $R_A(\mathbf{x}) \leq \max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{o},\, \mathbf{z}\in V_k} R_A(\mathbf{x}) = \lambda_k$ z argumentu výše

Věta o proplétání vlastních čísel

Nechť A je symetrická a B vznikne z A vyškrtnutím i-tého řádku a sloupce. Nechť $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ jsou vlastní čísla A a $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{n-1}$ vlastní čísla B. Potom: $\lambda_i \geq \sigma_i \geq \lambda_{i+1}$.

Důkaz (búno $i = n$):

- $R_B(\mathbf{y}) = R_A(\begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ o \end{pmatrix})$, $W = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$
- U_k volíme pro B na W, proto je $\lambda_k \geq \sigma_k$
- naopak U_{k+1} definuje λ_{k+1}
  - $U_k = U_{k+1} \cap W$ má dimenzi aspoň k
  - $\sigma_k \geq \min\limits_{\substack{\mathbf{y} \neq \mathbf{o} \\ \mathbf{y} \in U_k}} R_A(\mathbf{y}) \geq \min\limits_{\substack{\mathbf{x} \neq \mathbf{o} \\ \mathbf{x} \in U_{k+1}}}$