Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Peter Zeman

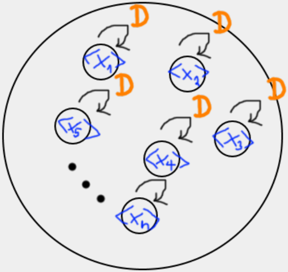
kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

May 17, 2021

Jordanova normální forma a nenormální matice

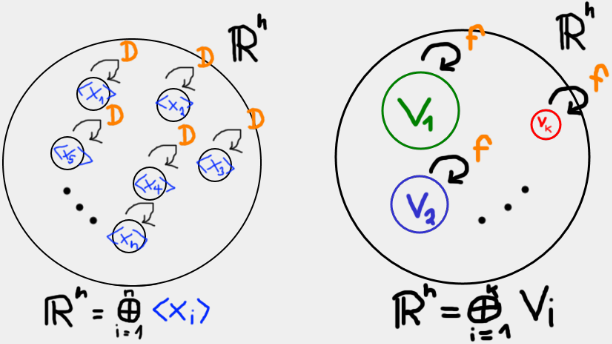
- matice A, B jsou **podobné**, pokud $A = SBS^{-1}$
- báze z vlastních vektorů $\implies$ B diagonální matice
- **Cíl**: Co když A nemá bázi z vlastních vektorů?

- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
- $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ... invariantní směry (vlastní vektory)



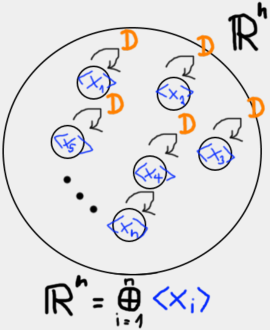
-

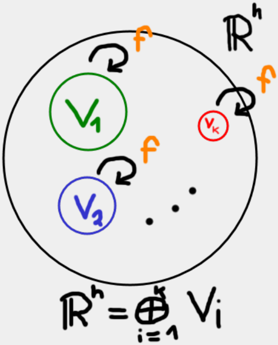
- Co v případě, že nemáme diagonální reprezentaci?
- invariantní směry $\Longrightarrow$ *invariantní podprostory*
-



Rozklad na invariantní podprostory

- Co v případě, že nemáme diagonální reprezentaci?
- invariantní směry $\implies$ *invariantní podprostory*

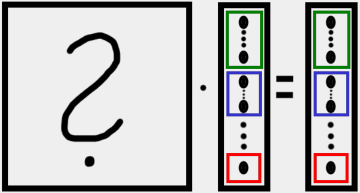


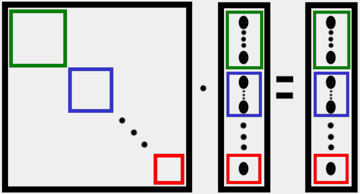


Direktní součet invariantních podprostorů

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ dostáváme jako direktní součet invariantní podprostorů při libovolném lineárním zobrazení.

Maticová reprezentace

- reprezentace f vůči bázi $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\ell$
  - podprostorů $V_1, V_2, \dots, V_k$
- 

- reprezentace f vůči bázím $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\ell$
  - podprostorů $V_1, V_2, \dots, V_k$
- 
- dostáváme blokově diagonální tvar
- Otázky:

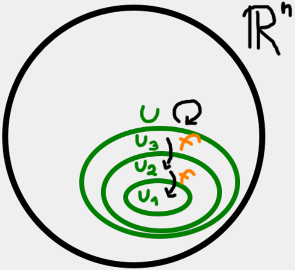
1. Jak popsat (zvolit) $V_1, V_2, \dots, V_k$?
2. Jak zvolit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_\ell$?

- Jak popsat $V_1, V_2, \ldots, V_k$?
- diagonalizovatelné: $\langle \mathbf{x}_i \rangle : \mathbf{x}_i \in Ker(A - \lambda_i I_n)$
- obecné: $U = ?$

1. $U_1 = Ker(A - \lambda_1 I_n)$
   - $\mathbf{x} \in U_1 \implies f(\mathbf{x}) \in U_1$
   - U_1 ... invariantní
   - ne nutně maximální $\implies \exists \mathbf{y} : f(\mathbf{y}) \in U_1$
   - $A\mathbf{y} \in Ker(A - \lambda I_n) \implies (A - \lambda I_n)A\mathbf{y} = \mathbf{o}$
   - $\implies \mathbf{y} \in Ker\left((A - \lambda_1 I_n)A\right)$
2. $U_2 = Ker\left((A - \lambda_1 I_n)A\right)$
3. $U_i = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^{i-1})$

Popis invariantních podprostorů

- $U_1 = Ker(A - \lambda_1 I_n)$
- $U_2 = Ker\left((A - \lambda_1 I_n)A\right)$
- $U_i = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^{i-1})$
- $U = U_k = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^{k-1}) = Ker((A - \lambda I_n)A^k)$

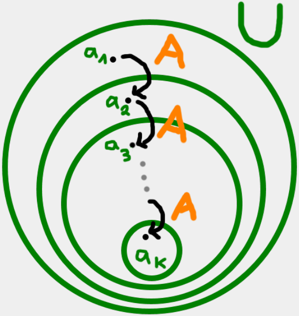


-

1. Jak popsat (zvolit) $V_1, V_2, \ldots, V_k$?
   - $V_i = Ker((A - \lambda_i I_n)A^{k_i})$
   - $\mathbb{R}^n = \oplus_{i=1}^{k} Ker((A - \lambda_i I_n)A^{k_i})$ ... invariantní podprostory
   - $\mathbf{x} \in V_i \implies A^{k_i+1}\mathbf{x} = \lambda_i A^{k_i}\mathbf{x}$ ... *zobecněný vlastní vektor*
2. Jak zvolit $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_j, \ldots, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_\ell$?

- Jak zvolit bázi $U = U^k = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^k)$?

1. $\forall i : \dim(U_i) = \dim(U_{i-1}) + 1$
   - $\mathbf{a}_1 \in U^k \setminus U^{k-1}$
   - $\mathbf{a}_2 = A\mathbf{a}_1 \in U^{k-1}$
   - $\dots$
   - $\mathbf{a}_k = A^{k-1}\mathbf{a}_1$
     - $\mathbf{a}_k$ ... vlastní vektor A
     - $A\mathbf{a}_k = \lambda_1 \mathbf{a}_k$



-

Volba báze invariantního podprostoru

- Jak zvolit bázi $U = U_k = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^{k-1})$?

1. $\forall i : \dim(U_i) = \dim(U_{i-1}) + 1$
    - $\mathbf{a}_1 \in U_k \setminus U_{k-1}$
    - $\mathbf{a}_2 = A\mathbf{a}_1 \in U_{k-1}$
    - $\dots$
    - $\mathbf{a}_k = A^{k-1}\mathbf{a}_1$
        - $\mathbf{a}_k$ ... vlastní vektor A
    - Jak bude vypadat příslušná buňka matice?
    - $$\begin{pmatrix} 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$
        - pro bázi $\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_1, \dots, A^{k-1}\mathbf{a}_1$

Volba báze invariantního podprostoru

- Jak zvolit bázi $U = U^k = Ker((A - \lambda_1 I_n)A^k)$?

1. $\forall i : \dim(U_i) = \dim(U_{i-1}) + 1$
   - $\mathbf{a}_1 \in U^k \setminus U^{k-1}$
   - $\mathbf{a}_2 = A\mathbf{a}_1 \in U^{k-1}$
   - $\dots$
   - $\mathbf{a}_k = A^{k-1}\mathbf{a}_1$
     - $\mathbf{a}_k$ ... vlastní vektor A
   - Jak bude vypadat příslušná buňka matice?
   - $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
     - resp. pro bázi $A^{k-1}\mathbf{a}_1, \dots, A\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1$
     - téměř Jordanova buňka

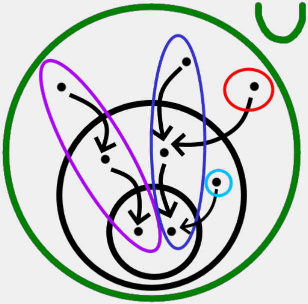
Alternativa k JNF

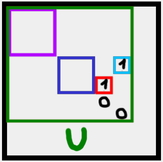
Pro případ $\forall i : \dim(U_i) = \dim(U_{i-1}) + 1$ dostáváme téměř JNF se zobecněnými vlastními vektory $A^k\mathbf{x} = \lambda A^{k-1}\mathbf{x}$ a daná bloková matice je určena jednoznačně až prohození buněk.

- $$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Co když je podmínka pro U porušena?

- struktura U obecně komplikovaná



- 

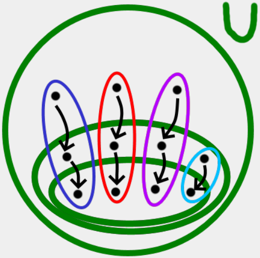
-
- proto se nepoužívá

V ČEM SE LIŠÍ JNF?

1. volba invariantních podprostorů:
   - $Ker((A - \lambda_i I_n)A^k) \rightsquigarrow Ker((A - \lambda_i I_n)^k)$
2. iterativní aplikování zobrazení:
   - $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \rightsquigarrow g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_i \mathbf{x}$

- i přes to platí: $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker((A - \lambda_i I_n)^k)$

Jednodušší struktura pro řetízky



-
- odpovídající buňky: $J_3(\lambda_i)$, $J_3(\lambda_i)$, $J_3(\lambda_i)$, $J_2(\lambda_i)$
- počet buněk = počet lineárně nezávislých vektorů pro λ_i
  - = $\dim Ker(A - \lambda_i I_n)$

- $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}$
- $\mathbf{x}_2 = (A - \lambda I_n)\mathbf{v}$
- $\mathbf{x}_3 = (A - \lambda I_n)^2\mathbf{v}$
  - $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{x}_1 \rightsquigarrow A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$
  - $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 - \lambda\mathbf{x}_2 \rightsquigarrow A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_2)$
  - $\mathbf{x}_3 \in Ker(A - \lambda)I_n) \rightsquigarrow A\mathbf{x}_3 = \lambda\mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_3)$
- $f \restriction \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

- $\mathbf{x}_1 = \mathbf{v}$
- $\mathbf{x}_2 = (A - \lambda I_n)\mathbf{v}$
- $\mathbf{x}_3 = (A - \lambda I_n)^2\mathbf{v}$
  - $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 - \lambda\mathbf{x}_1 \rightsquigarrow A\mathbf{x}_1 = \lambda\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$
  - $\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 - \lambda\mathbf{x}_2 \rightsquigarrow A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_2)$
  - $\mathbf{x}_3 \in Ker(A - \lambda)I_n) \rightsquigarrow A\mathbf{x}_3 = \lambda\mathbf{x}_3 = f(\mathbf{x}_3)$
- $f \restriction \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$
  - změna uspořádání báze

Jordanova normální forma

Pro libovolnou matici existuje Jordanova normální forma

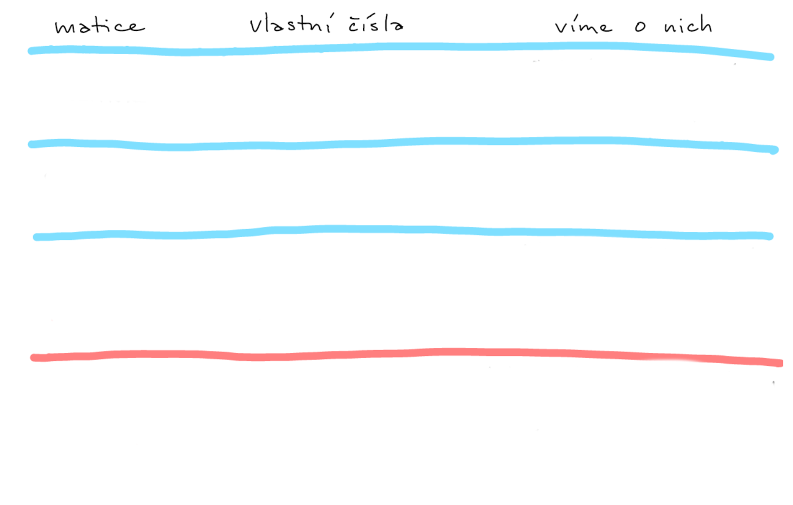
$$A = SJS^{-1}.$$

Důkaz:

1. Geometrický
   - skripta od Pavla Klavíka
2. Algebraický
   - trochu obecné algebry
   - mohu zaslat zájemcům

Nenormální matice

Hierarchie matic podle znalosti vlastních čísel



Hierarchie matic podle znalosti vlastních čísel

matice	vlastní čísla	víme o nich
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

Hierarchie matic podle znalosti vlastních čísel

matice	vlastní čísla	víme o nich
normální $A^*A = AA^*$	spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$	Vlastní čísla poví o matici strukturálně vše, stačí $Sp(A)$.
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

Hierarchie matic podle znalosti vlastních čísel

matice	vlastní čísla	víme o nich
symetrické $A = A^*$	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	Stačí pouze natahování, žádné rotace.
normální $A^*A = AA^*$	spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$	Vlastní čísla poví o matici strukturálně vše, stačí $Sp(A)$.
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

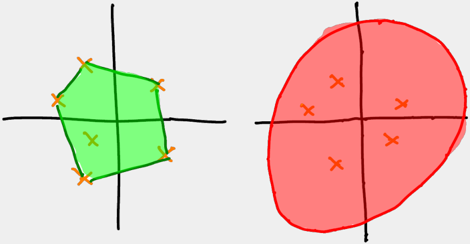
Hierarchie matic podle znalosti vlastních čísel

matice	vlastní čísla	víme o nich
symetrické pozitivně definitní	$\lambda_i \geq 0$	Další specifické vlastnosti, více později.
symetrické $A = A^*$	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	Stačí pouze natahování, žádné rotace.
normální $A^*A = AA^*$	spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$	Vlastní čísla poví o matici strukturálně vše, stačí $Sp(A)$.
nenormální $A^*A \neq AA^*$	Jordanova forma $A = SJS^{-1}$	Vlastní čísla neřeknou moc i pro diagonalizaci, musíme znát úhly mezi vlastními vektory.

Jak analyzovat nenormální matice?

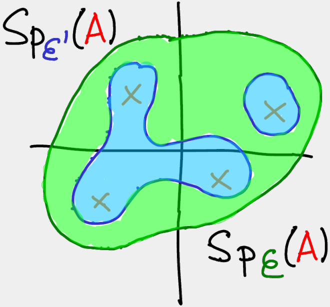
- moc se to neumí
- dnes aktivní výzkum
- Dvě zobecnění $Sp(A)$:
    1. numerický rozsah
    2. pseudospektrum

- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- $\lambda = \frac{\mathbf{x}^*A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}$ ... Rayleyho kvocient
- definice ***numerického rozsahu***:
- $W(A) = \{\frac{\mathbf{x}^*A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\} = \{\mathbf{x}^*A\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$
  - konvexní a obsahuje vlastní čísla



  -
  - normální matice ..... nenormální matice

- $Sp_\epsilon(A) = \{\lambda \mid \lambda$ je vlastní číslo $A + E, \|E\| \le \varepsilon\}$
  - $A + E$ ... změna vlastní čísel při malé perturbaci matice
  - $\|E\|$ ... maticová norma (konkrétně operátorová norma)

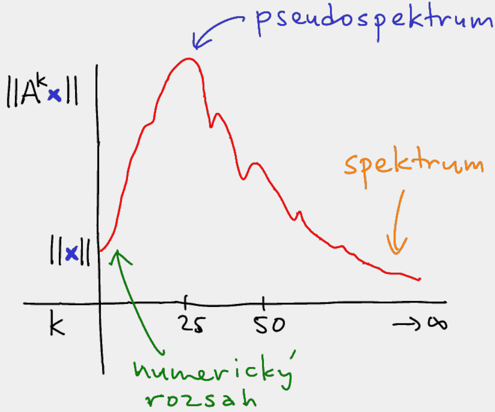


-
- $0 < \varepsilon' < \varepsilon \implies Sp_{\varepsilon'}(A) \subseteq Sp_\varepsilon(A)$

Příklad

- pokud $\varsigma(A) < 1 \implies \lim_{k\to\infty} A^k \mathbf{x} = 0$
  - $\varsigma(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$
- A nenormální $\implies$ konvergence může dlouho trvat
  - $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 10^5 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix}$
  - $A^{25} = \begin{pmatrix} 0.07 & 2 \cdot 10^5 \\ 0 & 0.07 \end{pmatrix}$
  - $\|A^{25}\mathbf{x}\| > \|\mathbf{x}\|$
- $\implies$ **nelze analyzovat začátek pouze z vlastních čísel**

- **nelze analyzovat začátek pouze z vlastních čísel**
- vlastní čísla prozradí pouze asymtotické chování



-