Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Peter Zeman

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

May 17, 2021

Schurův a spektrální rozklad matice

- matice A, B jsou **podobné**, pokud $A = SBS^{-1}$
- báze z vlastních vektorů $\implies$ B diagonální matice
- **Cíl**: Co když A nemá bázi z vlastních vektorů?
  1. Jordanova normální forma $A = SJS^{-1}$
     - příští téma
  2. Schurův rozklad $A = QUQ^{*}$
     - Q ... ortogonální matice
     - U ... horní trojúhelníková matice

Schurův rozklad

Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad

$$A = QUQ^*.$$

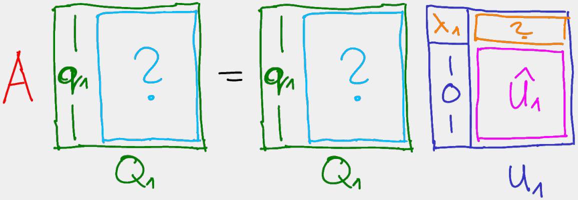
Důkaz:

- chceme: $AQ = QU$
  - $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ ... sloupce Q
  - $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ... diagonála U
- tedy: $A\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i + \sum_{j<i} u_{ji}\mathbf{q}_j$
- $i = 1$:
  - $A\mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1$
  - $\mathbf{q}_1$ vlastní vektor A
  - λ_1 vlastní číslo A
- pro každou matici existuje!
  - každý polynom má kořen v $\mathbb{C}$

Schurův rozklad

Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad $A = QUQ^*$.

Důkaz:



-
  - jak volit $\mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$?
  - $\mathbf{b}_i{}^* A \mathbf{q}_1 = \mathbf{o}$
- doplníme $\mathbf{q}_1$ na ortonormální bázi $\mathbf{q}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$
- $\hat{U}_1$ matice $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$
- $\hat{U}_1 = \hat{Q}_2 \hat{U} \hat{Q}_2{}^*$ ... Schurův rozklad
  - z indukčního předpokladu pro indukci podle dimenze matic

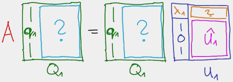
Schurův rozklad (důkaz)

Schurův rozklad

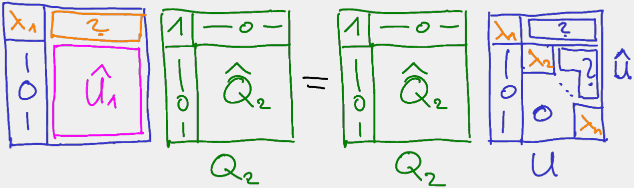
Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad $A = QUQ^*$.

Důkaz:

- doplníme $\mathbf{q}_1$ na libovolnou ortonormální bázi $\mathbf{q}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$



-
- $\hat{U}_1$ matice $(n-1) \times (n-1)$
- $\hat{U}_1 = \hat{Q}_2 \hat{U} \hat{Q}_2{}^*$ ... Schurův rozklad

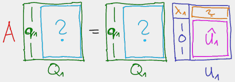


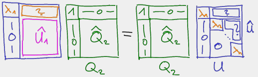
-
  - vychází z násobení blokových matic

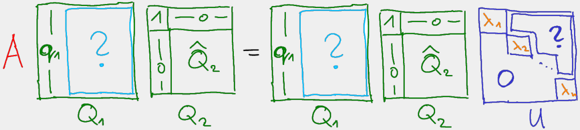
Schurův rozklad

Pro libovolnou matici A existuje Schurův rozklad $A = QUQ^*$.

Důkaz:

- 

- 

- 

- $Q = Q_1 Q_2$ ... součin ortogonálních matic $\implies$ ortogonální matice
- $A = QUQ^*$

- každé lineární zobrazení lze rozdělit na:
  1. **natahování** $A\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$
  2. **rotace** $A\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$, $\lambda_i \notin \mathbb{R}$
  3. **kosení** $x_i \rightarrow x_i + x_j$, kde $j < i$

- Matice A je ***normální***, pokud $A^*A = AA^*$
  - působí podivně
  - hluboká geometrická vlastnost: komutace s transpozicí (duálním zobrazením)
- $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ … řádky A
- $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ … sloupce A
- $(A^*A)_{ij} = \mathbf{s}_i{}^*\mathbf{s}_j = \mathbf{r}_j{}^*\mathbf{r}_i = (AA^*)_{ij}$
  - speciálně, $\|\mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_i\|$
  - normální matice mají stejné délky a úhly u řádkových a sloupcových vektorů

Spektrální rozklad

Pro matici A existuje spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$ právě tehdy když je A normální.

Důkaz:

1. $\Rightarrow$
   - $A = Q\Lambda Q^*$
   - $A^* = Q\Lambda^* Q^*$
   - $AA^* = Q\Lambda Q^* Q\Lambda^* Q^* =$
     - $Q^*Q = I_n$
   - $= Q\Lambda\Lambda^* Q^* = Q\Lambda^*\Lambda Q^* =$
     - Λ, Λ^* komutují
   - $= Q\Lambda^* Q^* Q\Lambda Q^* = A^*A$
2. $\Leftarrow$
   - pomocí Schurova rozkladu

Spektrální rozklad

Pro matici A existuje spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$ právě tehdy když je A normální.

Důkaz:

1. $\Rightarrow$
2. $\Leftarrow$
   - $A = QUQ^*$

   2.1 U je normální
   2.2 trojúhelníková normální matice je diagonální

Spektrální rozklad

Pro matici A existuje spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$ právě tehdy když je A normální.

Důkaz:

1. $\Rightarrow$
2. $\Leftarrow$
   2.1 U je normální
   - $U = Q^*AQ$
   - $U^* = Q^*A^*Q$
   - $UU^* = \cdots = U^*U$

Spektrální rozklad

Pro matici A existuje spektrální rozklad $A = Q\Lambda Q^*$ právě tehdy když je A normální.

Důkaz:

1. $\Rightarrow$
2. $\Leftarrow$
   2.1 U je normální
   2.2 trojúhelníková normální matice je diagonální
      - $\begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,n} \\ & t_{2,2} & \cdots & t_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & t_{n,n} \end{pmatrix}$
      - $\|\mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_i\|$
      - $\sqrt{t_{11}\bar{t}_{11}} = \|\mathbf{s}_1\| = \|\mathbf{r}_1\| = \sqrt{t_{11}\bar{t}_{11} + \cdots + t_{1n}\bar{t}_{1n}}$
      - $\implies t_{12}, \ldots, t_{1n} = 0$
      - zbytek obdobně