Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý, Peter Zeman

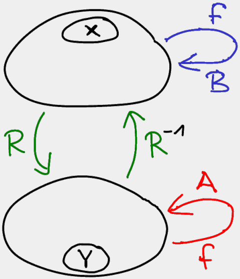
kam.mff.cuni.cz/~cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

April 25, 2022

Diagonalizace, vlastní čísla a Gerschgorinovy disky

Podobnost matic

Dvě matice $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jsou ***podobné***, pokud reprezentují stejné lineární zobrazení vůči dvěma bázím.

- $A = RBR^{-1}$
- 

  - R ... matice přechodu od báze X k bázi Y

Vlastní čísla podobných matic

Podobné matice A a B mají stejná vlastní čísla.

Důkaz:

- $A = RBR^{-1}$
- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- $RBR^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- $B(R^{-1}\mathbf{x}) = \lambda(R^{-1}\mathbf{x})$
    - vynásobím zleva R^{-1}
- $\implies R^{-1}\mathbf{x}$ je vlastní vektor B odpovídající λ

- **Cíl**: Chceme nalézt bázi, v které jsou matice reprezentující endomorfismus co nejjednodušší.
- pokud existuje báze z vlastních vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$:

$$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad AS = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{S \Lambda S^{-1}}_{\text{diagonalizace}}$$

-

- **Cíl**: Chceme nalézt bázi, v které jsou matice reprezentující endomorfismus co nejjednodušší.
- pokud existuje báze z vlastních vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$:
- $$S = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad AS = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = \underbrace{S \Lambda S^{-1}}_{\text{diagonalizace}}$$

Diagonalizovatelnost

Matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **diagonalizovatelná** (podobná diagonální matici) právě tehdy, když existuje báze v vlastních vektorů

1. Analýza lineárních dynamických systémů
   - $\forall i : |\lambda_i| < 1 \iff \|A^k \mathbf{x}\| \to 0$
     - minulé cvičení...
2. Výpočet mocnin matice
   - $A^k = (S\Lambda S^-1)^k = S\Lambda S^-1S \dots S^{-1}S\Lambda S^{-1} =$
   - $S\Lambda^k S^{-1} = S \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & \\ & \ddots & \\ & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix} S^{-1}$
   - stačí pouze:
     2.1 vypočítat mocniny vl. čísel
     2.2 přenásobit jimi sloupce S
     2.3 provést **jeden** maticový součin
3. Lze modelovat libovolnou lineární rekurenci
   - domácí úkol
   - v textu analýza Fibonacciho posloupnosti (str. 45)

Analýza charakteristického polynomu...

Vlastnosti vlastních čísel

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

1.
2.

Důkaz:

- $det(A - \lambda I_n) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$
  - $det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda) + \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n, \sigma \neq id} \ldots$
  - $det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \ldots$
  - $\alpha_n = (-1)^n$
- $p_A(\lambda) = \gamma(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$
  - $p_A(\lambda) = \gamma(-1)^n \lambda^n + \ldots$
  - $\gamma = 1$

Analýza charakteristického polynomu...

Vlastnosti vlastních čísel

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

1. $det(A) = \prod_i \lambda_i$
2.

Důkaz: $\lambda = 0$

- $det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$
  - $det(A) = \alpha_0$
- $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$
  - $p_A(0) = \prod_i \lambda_i = \alpha_0$

Součet a součin vlastních čísel

Analýza charakteristického polynomu...

Vlastnosti vlastních čísel

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

1. $det(A) = \prod_i \lambda_i$
2. $tr(A) = \sum_i \lambda_i$

Důkaz: člen u λ^{n-1}

- $det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \prod_i \lambda_i$
  - $det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n, \sigma \neq id} \cdots$
  - pro $\sigma \neq id$ nedostaneme člen u λ^{n-1}
    - maximálně člen u λ^{n-2}
  - $det(A - \lambda I_n) = (-a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots$
- $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$
  - $p_A(\lambda) = (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots$
    - výběr λ z $n - 1$ závorek
- $(-a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn}) = (-\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)$

Vlastnosti vlastních čísel

Pro libovolnou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

1. $det(A) = \prod_i \lambda_i$
2. $tr(A) = \sum_i \lambda_i$

- **Pěkné... ale proč?**
    1. verifikace výpočtů vlastních čísel
    2. další teoretické výsledky

O stejných vlastních číslech

A i A^T mají stejná vlastní čísla

Důkaz:

- $det(B) = det(B^T)$
- $det(A - \lambda I_n) = det(A^T - \lambda I_n)$
  - $B = A - \lambda I_n$
  - $B^T = (A - \lambda I_n)^T = A^T - \lambda I_n$
- $\lambda \in Sp(A) \iff det(A - \lambda I_n) = 0 = det(A - \lambda I_n) \iff \lambda \in Sp(A^T)$

Reálná vlastní čísla

- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x}$
  - zleva $\mathbf{x}^T$
- $\lambda = \frac{\mathbf{x}^T A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$
  - podíl dvou reálných čísel $\implies \lambda \in \mathbb{R}$
- **Ukázali jsme, že $\lambda \in \mathbb{R}$!**
- $\mathbf{x}$ je obecně komplexní vektor $\implies$ problém
  - $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ není skalární součin

Komplexní skalární součin a hermitovská transpozice

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$
  - $x = a + bi$
  - $\overline{x} = a - bi$
- $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \cdots + \overline{x_n} x_n}$
- ***Komplexní (Hermitovská) transpozice*** matice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ je $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ definována jako

$$(A^*)_{ij} = (\overline{A})_{ji}$$

  - někdy značena A^H
  - A je ***symetrická***, pokud $A = A^*$
- platí: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$
- platí: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$

(Hermitovsky) symetrická matice má reálná vlastní čísla

Vlastní čísla symetrických matic

Symetrická matice $A = A^*$ má všechna vlastní čísla reálná.

Důkaz:

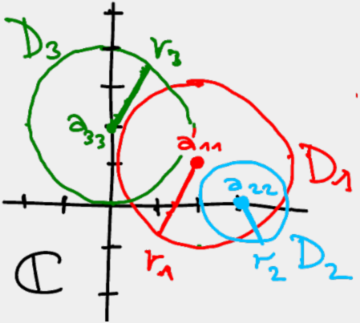
- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^*\mathbf{x}$
  - zleva $\mathbf{x}^*$
- $\lambda = \frac{\mathbf{x}^*A\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}}$
  - nyní již $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle\mathbf{x}^*\mathbf{x}\rangle$
  - $\implies$ jmenovatel je $\mathbb{R}$
- $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} \in \mathbb{C}$
- $(\mathbf{x}^*A\mathbf{x})^* = \mathbf{x}^*A^*\mathbf{x} = \mathbf{x}^*A\mathbf{x}$
  - $\implies \mathbb{R}$
- podíl dvou reálných čísel $\implies \lambda \in \mathbb{R}$

- **Otázka:** Jak počítat vlastní čísla?

1. Výpočet jako kořeny charakteristického polynomu
   - v lepší případě náročné
   - v horším **nelze!**
2. aproximace a odhady
   - Gerschgorinovy disky

Gerschgorinovy disky

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 1 & i \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2i \end{bmatrix}$$



Gerschgorinovy disky

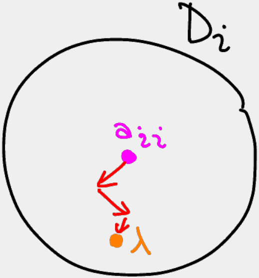
Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uvažujme disky v komplexní rovině D_i se středem a_{ii} a poloměrem $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Potom každé vlastní číslo $\lambda \in \bigcup D_i$.

Gerschgorinovy disky

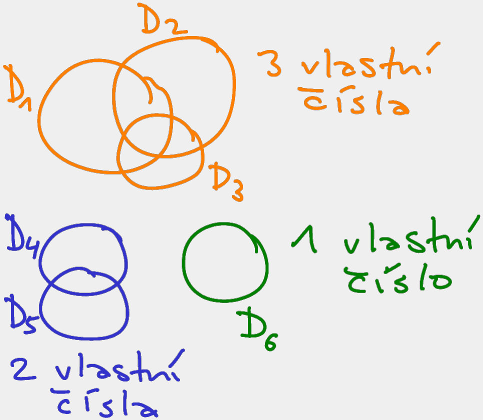
Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uvažujme disky v komplexní rovině D_i se středem a_{ii} a poloměrem $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Potom každé vlastní číslo $\lambda \in \bigcup D_i$.

Důkaz:

- $\lambda \in Sp(A)$, $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$
- $(A\mathbf{x})_i = \lambda x_i$
- $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{x_i}$
- $\lambda = (A\mathbf{y})_i = \sum_j a_{ij} y_j$
- $\sum_j a_{ij} y_j = a_{ii} + \sum_j a_{ij} y_j = a_{ii} + \sum_j a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$
- zvolíme $i : x_i \geq x_j \implies |\frac{x_j}{x_i}| \leq 1$
- $\lambda \in D_i$

- $\lambda = a_{ii} + \sum_j a_{ij} \frac{x_j}{x_i}$
  - a_{ii} ... střed disku
  - $\frac{x_j}{x_i} \in \mathbb{C}$
    - násobení komplexních čísel $\iff$ rotace + natahování
  - $\implies$ číslo a_{ij} se zrotuje a možná zkrátí
  - 

Disky na steroidech: Topologická varianta



Topologická varianta Gerschgorinových disků

V každé komponentě souvislosti disků je právě tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.

Topologická varianta Gerschgorinových disků

V každé komponentě souvislosti disků je právě tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.

Důkaz:

- Potřebujeme 2 fakty:

1. **Vlastní čísla jsou spojitá v koeficientech matice**
   - "*malá změna* hodnot matice vede na *malou změnu* vlastního čísla"
   - dalo by se nahlédnout ze spojitosti kořenů polynomů (v koeficientech matice)
2. **Vlastní čísla diagonální matice jsou koeficienty na diagonále**
   - platí ze slabší varianty Gerschgorinových disků

Topologická varianta Gerschgorinových disků

V každé komponentě souvislosti disků je právě tolik vlastních čísel, kolik obsahuje disků.

Důkaz:

- D je diagonální část A
- $A(t) = tA + (1 - t)D$, $t \in [0, 1]$ ... spojitá transformace D do A
  - $A(0) = D, A(1) = A$
- $\implies$ každé vlastní číslo se spojitě posune z a_{ii} do λ
  - nemůže změnit komponentu