Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

April 4, 2023

Vlastní čísla

Motivace - dynamické systémy

- systém zahrnující změny
    1. napouštění bazénu s aktivním odtokem
    2. ohřev vody v hrnci
    3. růst včelí kolonie
- spojitý vs. diskrétní model
    1. spojitý: diferenciální rovnice (původní *vznik* vl. čísel)
    2. diskrétní: např. dynamické lineární systémy (naše pojetí)

Motivace - dynamické lineární systémy

- $\mathbf{x}_0$ … počáteční stav
- $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$ … po prvním kroku iterace
- $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1} = A^2\mathbf{x}_{k-2} = A^k\mathbf{x}_0$ … po
- Jak se systém bude chovat *asymptoticky*? $A^\infty\mathbf{x}_0 = \lim_{k\to\infty} A^K\mathbf{x}_0$

  1. *stabilizuje se* po čase v nějakém rovnovážném stavu?
  2. bude *navždy* chaotický?
  3. bude periodicky oscilovat mezi rovnovážnými stavy?

Případ v $\mathbb{R}^1$

- systém $x \to \lambda x$
  - $x \in \mathbb{R}$
  - $\lambda \in \mathbb{R}$
- Jak se bude systém chovat asymptoticky?
  1. $|\lambda| < 1$
     - $x \to 0$
     - *konvergující* případ
  2. $|\lambda| = 1$
     2.1 $x \to x$ $(\lambda = 1)$
     2.2 $x, -x, x, -x, \ldots$ $(\lambda = -1)$
     - *stabilizovaný* případ
     - *oscilující* případ
  3. $|\lambda| > 1$
     - $x \to \pm\infty$
     - *divergující* případ

PŘÍPAD V $\mathbb{R}^2$

- systém $\mathbf{x}_k = A\mathbf{x}_{k-1}$
- **klíčové: prostudujeme takové $\mathbf{x}$, že $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$**
  - případ v jedné dimenzi: $\{t \cdot \mathbf{x} | t \in \mathbb{R}\}$
  - umíme zanalyzovat chování
- v závislosti na těchto směrech určíme chování všech $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (odečteme pravou stranu)
- platí vždy pro $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $\{t \cdot 0 | t \in \mathbb{R}\} = \{0\}$
  - nazajímavé, zakážeme
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ je singulární

Pro matici $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definujme **vlastní vektor** $(x, y)^T \neq (0, 0)^T$ a odpovídající **vlastní číslo** λ jako řešení výrazu

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O vlastních číslech matice

Číslo λ je vlastním číslem $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ právě tehdy, když $A - \lambda I_n$ je singulární, tj.

$$det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Determinant vede na 3 případy

- $det(A - \lambda I_n) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc =$
- $= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc =$
- $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$
- řešení: $\lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$
- 3 případy:
  1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
  2. $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
  3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$
- A zachová prostory:
  - $\mathbb{R}\mathbf{v} = \{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathbb{R}\mathbf{w} = \{s\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$
- A zachová prostory:
  - $\mathbb{R}\mathbf{v} = \{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathbb{R}\mathbf{w} = \{s\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$

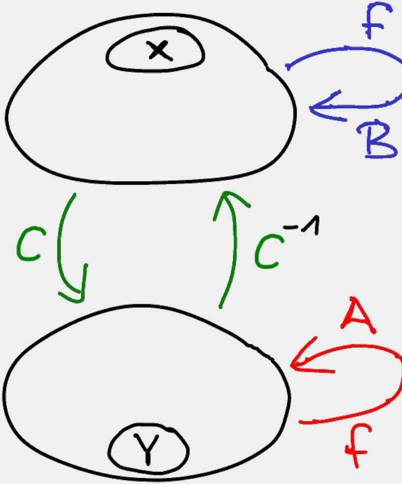
Báze z vlastních vektorů

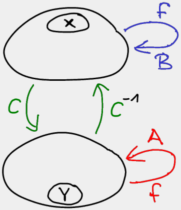
Vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz:

- pro spor $\mathbf{v} = \gamma\mathbf{w}$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
- $A\mathbf{v} = A\gamma\mathbf{w} = \gamma A\mathbf{w} = \gamma\mu\mathbf{w} = \mu\gamma\mathbf{w} = \mu\mathbf{v}$
- spor s $\lambda \neq \mu$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$
- A zachová prostory:
    - $\mathbb{R}\mathbf{v} = \{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
    - $\mathbb{R}\mathbf{w} = \{s\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$
- zvolíme bázi $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ místo $\{e_1, e_2\}$
- $$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$


f
x
B
C
C^{-1}
A
Y
f



- $C \sim {}_{\{e_1,e_2\}}[id]_{\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}}$
- $C = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{v} & \mathbf{w} \\ | & | \end{pmatrix}$
- $C^{-1} \sim {}_{\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}}[id]_{\{e_1,e_2\}}$
- $B = C^{-1}AC$
- $A = CBC^{-1}$

PODOBNOST MATIC $B = C^{-1}AC$

Podobnost

Matice A a B jsou **podobné**, pokud reprezentují stejné lineární zobrazení vůči různým bázím.

Charakterizace podobnosti

Matice A a B jsou **podobné**, právě tehdy, když existuje regulární C, že

$$A = CBC^{-1}.$$

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$
- A zachová prostory:
  - $\mathbb{R}\mathbf{v} = \{t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$
  - $\mathbb{R}\mathbf{w} = \{s\mathbf{w} \mid s \in \mathbb{R}\}$
- zvolíme bázi $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ místo $\{e_1, e_2\}$
- $$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Hyperbolické zobrazení

Lineární zobrazení je **hyperbolické**, pokud $|\lambda| < 1 < |\mu|$.

- Dvě možnosti:
  1. $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ (2 vlastní vektory)
  2. $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ (jeden vlastní vektor)

- $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Škálování

Zobrazení $B = \lambda I_2$ se nazývá **škálování** neb **homothetie**.

- $\{\mathbf{v}, \mathbf{y}\}$ báze
  - $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$
  - $\mathbf{y}$ libovolné
- $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$
- $(\lambda - x)(d - x) = 0$
  - $det(B - xI_2) = 0$
- $d = \lambda$
  - jinak d je vlastní číslo!

- $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- Otázka: Čemu se bude rovnat b?

Nezávislá volba prvku $b \in \mathbb{R}$

Pro libovolné lineární zobrazení A s jedním reálným vlastním číslem a jedním reálným vlastním vektorem $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ existuje pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ báze taková, že

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Nezávislá volba prvku $b \in \mathbb{R}$

Pro A s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ existuje pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ báze taková, že $B' = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Důkaz:

- cíl: Ukázat podobnost B a B'
- $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- sloupce B odpovídají $\{\mathbf{v}, w\}$, že $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $Aw = b\mathbf{v} + \lambda w$
- sloupce B' odpovídají $\{\mathbf{v}, z\}$, že $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $Az = a\mathbf{v} + \lambda z$
- $B' = DBD^{-1}$
- $D \sim {}_{\{\mathbf{v},z\}}[id]_{\{\mathbf{v},w\}}$
- $D = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}$

Nezávislá volba prvku $b \in \mathbb{R}$

Pro A s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ existuje pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ reprezentace nahrazující b v B za a v B'.

Důkaz:

- $D = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$
- $DD^{-1} = I_2$, $D^{-1}D = I_2$
- $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & ex + fy \\ g & gx + ey \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $e = 1, g = 0$
  - $ex + fy = 0, gx + hy = 1$
  - $x + fy = 0, hy = 1 \implies x = -fy, h = \frac{1}{y}$

Nezávislá volba prvku $b \in \mathbb{R}$

Pro A s $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ existuje pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ reprezentace nahrazující b v B za a v B'.

Důkaz:

- $$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
  - $e = 1, g = 0, x = -fy, h = \frac{1}{y}$
- $$\begin{pmatrix} 1 & -fy \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} =$$
- $$= \begin{pmatrix} 1 & -fy \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \lambda f + \frac{b}{y} \\ 0 & \frac{\lambda}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda f + \frac{b}{y} - fy\frac{\lambda}{y} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
- $\lambda f + \frac{b}{y} - fy\frac{\lambda}{y} = a \implies \frac{b}{y} = a \implies y = \frac{b}{a}$

Nezávislá volba prvku $b \in \mathbb{R}$

Pro libovolné lineární zobrazení A s jedním reálným vlastním číslem a jedním reálným vlastním vektorem $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ existuje pro každé $0 \neq a \in \mathbb{R}$ báze taková, že

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Důkaz:

- $\begin{pmatrix} 1 & -f\frac{b}{a} \\ 0 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f \\ 0 & \frac{a}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, f \in \mathbb{R}$
- pro každé a máme nekonečně mnoho z (pro každé $f \in \mathbb{R}$) takových, že $Az = a\mathbf{v} + \lambda z$

- speciálně pro $a = 1$:
- $B' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
- pokud naopak $\lambda = 1$:

Zkosení

Zobrazení $x \to Ax$ se nazývá **zkosení**, pokud je podobné

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dvě komplexně sdružená vlastní čísla

- $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $A\mathbf{w} = \overline{\lambda}\mathbf{w}$
- $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$
  - $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}}$
  - $\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\overline{\mathbf{v}} = A\overline{\mathbf{v}}$
    - A je reálná matice
- $A\mathbf{w} = \overline{\lambda}\mathbf{w}$
  - $\implies \mathbf{w} = \overline{\mathbf{v}}$
- zvolíme $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$ jako bází:
- $B = \begin{pmatrix} \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi) & 0 \\ 0 & \rho(\cos\phi - i \cdot \sin\phi) \end{pmatrix}$
- není úplně jasné, co je to za zobrazení...

- $B = \begin{pmatrix} \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi) & 0 \\ 0 & \rho(\cos\phi - i \cdot \sin\phi) \end{pmatrix}$
    - pro bázi $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$
- koeficienty v $\mathbb{C}$
    - chceme v $\mathbb{R}$
- rozdělíme informaci z $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$ na reálnou a imaginární složku

1. $\mathbf{v} + \overline{\mathbf{v}}$ ... reálná složka
    - $x + iy + (x - iy) = 2x$
2. $\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}$ ... imaginární složka
    - $x + iy - (x - iy) = 2iy$
    - chceme opět jen reálnou část
    - $\implies i(\mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}) = 2i^2 y = -2y$

3. Dvě komplexně sdružená vlastní čísla

- $C = {}_{\{\mathbf{v},\bar{\mathbf{v}}\}}[id]_{\{\mathbf{v}+\bar{\mathbf{v}}, i(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}})\}}$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
- $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{i} & \frac{1}{i} \end{pmatrix}$
- $B' = C^{-1}BC = \rho \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

Dvě komplexně sdružená vlastní čísla

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ s komplexními vlastními čísly $\lambda = \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ a $\overline{\lambda} = \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ je podobné zobrazení

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Dvě komplexně sdružená vlastní čísla

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ s komplexními vlastními čísly $\lambda = \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ a $\overline{\lambda} = \rho(\cos\phi + i \cdot \sin\phi)$ je podobné zobrazení

$$\rho \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

- $\rho = 1$:

Rotace

Zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ se nazývá **rotace**, pokud je podobné

$$B' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Asymtotické chování v $\mathbb{R}^2$

- $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \ldots$
  - ***orbita*** vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- Jaké je asymtotické chování orbit?

- Zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ **konverguje k počátku**, pokud $\|A^k\mathbf{x}\| \to 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a $k \to \infty$

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz:

1. pro speciální případy matic:
   - $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$
2. pro obecnou matici A

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz: Různá reálná vlastní čísla λ_1, λ_2

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k x \\ \lambda_2^k y \end{pmatrix}$
- $\| \bullet \| \to 0 \iff |\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz: Jedno vlastní číslo λ_1

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1}a \\ 0 & \lambda_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k x + \lambda_1^{k-1} kay \\ \lambda_1^k y \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \lambda_1^k x + \lambda_1^{k-1} kay \\ \lambda_1^k y \end{pmatrix} = \lambda_1^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda_1^{k-1} \begin{pmatrix} kay \\ 0 \end{pmatrix}$
- Není jasné, že norma druhého vektoru jde k nule..

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz: Jedno vlastní číslo λ_1

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x + ay \\ \lambda_1 y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq$
- $\leq |\lambda_1| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + |a| \left\| \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \leq |\lambda_1| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| + |a| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq$
- $= (|\lambda_1| + |a|) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz: Jedno vlastní číslo λ_1

- $\left\| \begin{pmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq (|\lambda_1| + |a|) \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$
- $(|\lambda_1| + |a|) < 1 \implies$ konverguje k počátku

1. pro $a = 0$
   - $|\lambda_1| < 1$
   - $\implies \| \bullet \| \to 0$
2. pro $a \neq 0$
   - zvolme a: $|\lambda_1| + |a| < 1$
   - $\implies \| \bullet \| \to 0$

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz: Dvě komplexně sdružená čísla $\lambda_1, \overline{\lambda_1}$

- $$\left[|\lambda_1| \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\right]^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |\lambda_1^k| \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
  - $\left\| \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ ... rotace nemění normu
- $$\left\| \lambda_1^k \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = |\lambda_1^k| \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$$
- $\| \bullet \| \to 0 \iff |\lambda_1| < 1$

Konvergence k počátku

Lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ konverguje k počátku, právě tehdy když $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$.

Důkaz:

- Obecná matice A
- $A^k\mathbf{x} = (C^{-1}BC)^k\mathbf{x} = C^{-1}B^kC\mathbf{x}$
  - chceme: $\|A^k\mathbf{x}\| \to 0$ pro $k \to \infty$
  - tedy: $\|C^{-1}B^kC\mathbf{x}\| \to 0$ pro $k \to \infty$
  - víme: $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \|B^k\mathbf{y}\| \to 0$ pro $k \to \infty$
  - tedy pokud $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, tak i pro toto $\mathbf{y}$
- chceme: $\left\|C'B^k\mathbf{y}\right\| \to 0$ pro $k \to \infty$
  - protože $\left\|C'B^k\mathbf{y}\right\| = \left\|A^k\mathbf{x}\right\|$

Asymtotické chování v $\mathbb{R}^2$

Využijeme dvojice lemmat

Norma indukovaná C

Nechť $\|\bullet\|$ je norma a C je regulární matice. Poté zobrazení $\|\mathbf{x}\|^C := \|C\mathbf{x}\|$ je také norma.

Ekvivalence norem

Pro libovolné 2 normy $\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b$ existují čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$c_1\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq c_2\|\mathbf{x}\|_b.$$

- posloupnost $y, By, B^2y, \ldots$ jde v normě $\|\bullet\|$ k 0
- vezmeme novou normu $\|\bullet\|^{C^{-1}}$
- z ekvivalence norem i v této normě jde $Cy, CBy, CB^2y, \ldots$ v normě $\|\bullet\|^{C^{-1}}$ k 0

Norma indukovaná C

Nechť $\|\bullet\|$ je norma a C je regulární matice. Poté zobrazení $\|\mathbf{x}\|^C := \|C\mathbf{x}\|$ je také norma.

Důkaz:

1. $\|\mathbf{x}\|^C = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
   - $\|C\mathbf{x}\| = 0 \iff C\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$
     - poslední ekvivalence z regularity C
2. $\|\alpha\mathbf{x}\|^C = |\alpha|\|\mathbf{x}\|^C$
   - $\|C\alpha\mathbf{x}\| = \|\alpha C\mathbf{x}\| = |\alpha|\|C\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^C \leq \|\mathbf{x}\|^C + \|\mathbf{y}\|^C$
   - $\|C(\mathbf{x}+\mathbf{y})\| = \|C\mathbf{x}+C\mathbf{y}\| \leq \|C\mathbf{x}\| + \|C\mathbf{y}\|$

Asymtotické chování v $\mathbb{R}^2$

Ekvivalence norem

Pro libovolné 2 normy $\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_b$ existují čísla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$c_1\|\mathbf{x}\|_b \leq \|\mathbf{x}\|_a \leq c_2\|\mathbf{x}\|_b.$$

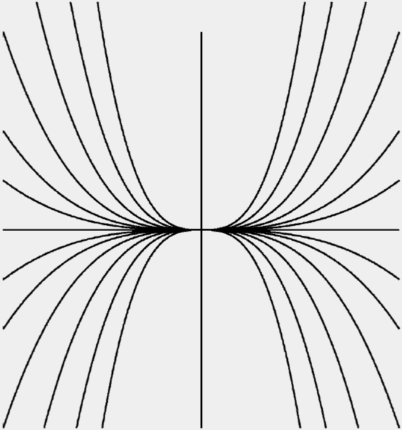
Důkaz: Jako domácí úkol

1. Stačí uvažovat $\|\bullet\|_b = \|\bullet\|_1 \sum_{i=1}^{n}|x_i|$
   - $\|\bullet\|_1$ je norma
   - ekvivalence $\|\bullet\|_a$ a $\|\bullet\|_1 \implies$ ekvivalence $\|\bullet\|_a$ a $\|\bullet\|_b$
2. Stačí uvažovat $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$
3. spojitost $\|\bullet\|_a$ v rámci $\|\bullet\|_1$:
   $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 < \delta \implies |\|\mathbf{x}\|_a - \|\mathbf{y}\|_a| < \epsilon$
4. existuje $\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathbf{x}\|_a$, $\max\limits_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathbf{x}\|_a \implies \exists c_1, c_2$

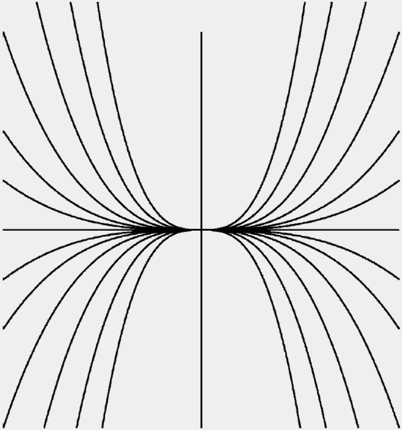
1. Dvě reálná vlastní čísla
   - $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$
   - $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$
   - $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1$
   - $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| < 1$
   - $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| > 1$
   - $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$
2. Jedno reálné vlastní číslo (jeden lineárně nezávislý vl. vektor)
   - $|\lambda_1| < 1$
   - $|\lambda_1| = 1$
   - $|\lambda_1| > 1$
3. Dvě komplexně sdružená vlastní čísla
   - $|\lambda_1| < 1$
   - $|\lambda_1| = 1$
   - $|\lambda_1| > 1$

- Kolik typů LZ máme pro obecné *n*? DÚ za 20 bodů

Dvě reálná vlastní čísla: $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$

- $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$
- $B^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k x \\ {\lambda_2}^k y \end{pmatrix}$
- obě osy aspoň rychlost $|\lambda_1|$
- 

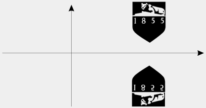
Dvě reálná vlastní čísla: $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$

- $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$
- $B^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k x \\ {\lambda_2}^k y \end{pmatrix}$
- obě osy aspoň rychlost $|\lambda_1|$
- 

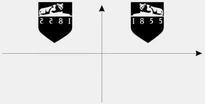
Dvě reálná vlastní čísla: $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| = 1$

- dva lineárně nezávislé vlastní vektory **v**, **w**

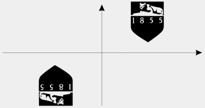
1. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$ … identita
2. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$



3. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

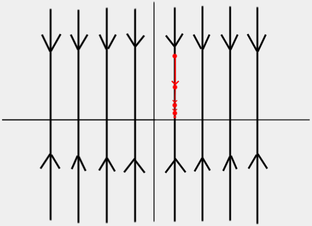


4. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1$

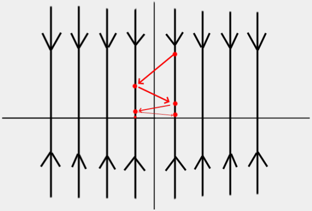


- projekce na osu x

1. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 < 1$



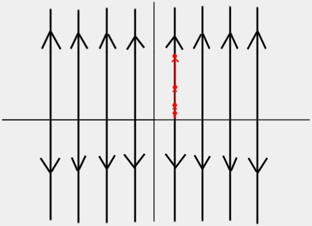
2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 < 1$



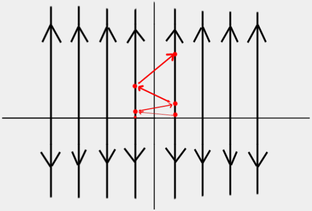
DVĚ REÁLNÁ VLASTNÍ ČÍSLA: $|\lambda_1| = 1, |\lambda_2| > 1$

- kolmé vzdalování od osy x

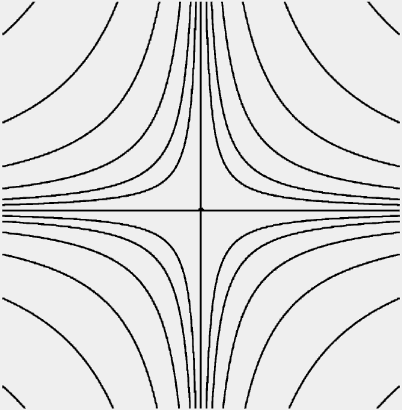
1. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 > 1$



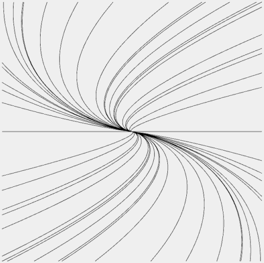
2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 > 1$



Dvě reálná vlastní čísla: $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$



- pro $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$
- orbity $y = \frac{1}{x}$

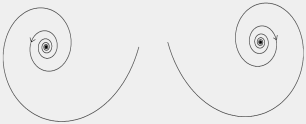
- $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$
- $B^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {\lambda_1}^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n(x + ny) \\ {\lambda_1}^n y \end{pmatrix}$
  - v druhé souřadnici konverguje monotonně k 0
  - v první souřadnici konverguje k 0, ne nutně monotonně
- 

Dvě komplexně sdružená vlastní čísla

- $|\lambda_1| \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ ... rotace o ϕ a škálování o $|\lambda_1|$

1. $0 < |\lambda_1| < 1$

2. $|\lambda_1| > 1$



3. $|\lambda_1| = 1$