# Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

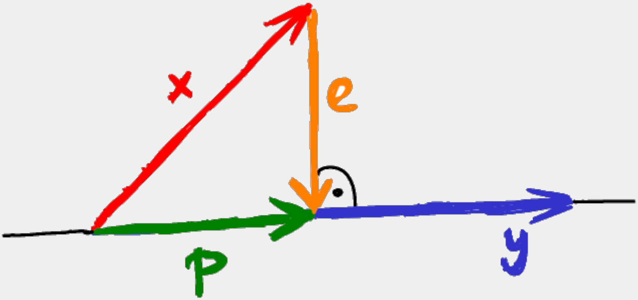
February 27, 2023

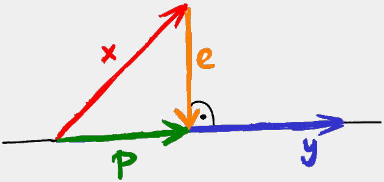
# Ortogonální projekce a Cauchy-Schwarzova nerovnost

# Cíl cvičení

- pochopení kolmé (ortogonální) projekce
  - i projekce obecně
- další možná interpretace skalárního součinu

- $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ … vektory
- Cíl: Ortogonální projekce $\mathbf{x}$ na přímku $\langle \mathbf{y} \rangle$






- $\mathbf{p} = c \cdot \mathbf{y}$
  - $c$ ... konstanta určující projekci
- chceme $c$ aby $\mathbf{e} = \mathbf{p} - \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$
- $0 = \langle \mathbf{p} - \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle c\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = c\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
- neboli $c = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$

## Kolmá projekce vektoru na přímku

Kolmá projekce na přímku $\langle \mathbf{y} \rangle$ je lineární zobrazení

$$\mathbf{x} \to \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}.$$

*Myšlenka: Délka rozdílu projekce je nezáporná*

**Cauchy-Schwarzova nerovnost**

Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí

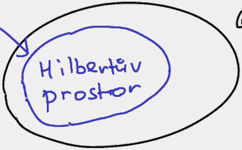
$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

1. **Algebraická**
   1.1 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ... trojúhelníková nerovnost
      - použijeme
   1.2 porovnání dvou různých součinů vektorů
      - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ a $||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$
   1.3 dokazování netriviálních nerovností
      - $\frac{1}{n} \leq a_1^2 + \cdots + a_n^2$
2. **Teoretická**: *Funkcionální analýza*
   - Vektorový prostor funkcí $(\mathcal{F}, \bigoplus, \bigotimes)$
   - $\mathcal{F}$ ... množina funkcí
   - $\bigoplus$,$\bigotimes$ ... operátory funkcí
      - *funkcím přiřazují funkci*
   - $(\mathcal{F}, \bigoplus, \bigotimes)$ má nekonečnou dimenzi

# Motivace CS-nerovnosti: Hilbertovy prostory

- $(\mathcal{F}, \bigoplus, \bigotimes)$ má nekonečnou dimenzi
  - složité
- $\implies$ omezíme se na *Hilbertovy prostory*
  - tj. prostory funkcí **konečné normy**
- CS-nerovnost: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$
  - $\implies$ konečný skalární součin

konečná norma a skalární součin



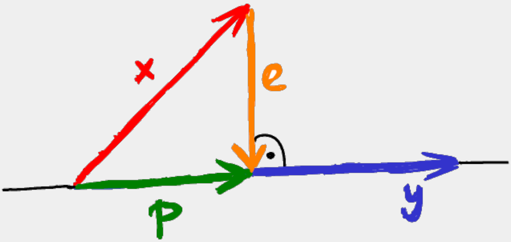

prostor všech funkcí (spojitých, diferencovatelných, ...)

## Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro libovolné dva vektory **x** a **y** platí

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Důkaz: délka rozdílu projekce **e** je nezáporná



## Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Důkaz: délka rozdílu projekce $\mathbf{e}$ je nezáporná

- $0 \leq \|\mathbf{e}\|$
- $0 \leq \|\mathbf{e}\|^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{p} - \mathbf{x}, \mathbf{p} - \mathbf{x} \rangle =$
- $= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle =$
  - linearita skalárního součinu
- $= \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle =$
  - symetrie skalárního součinu
- $= \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$
  - $\mathbf{p} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}$

## Cauchy-Schwarzova nerovnost

Pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ platí $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$.

Důkaz: délka rozdílu projekce $\mathbf{e}$ je nezáporná

- $0 \leq \|\mathbf{x}\| = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y} \rangle^2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2 \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle =$
- $= \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y} \rangle} - 2 \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y} \rangle} + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$
- $0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
  - vynásobením $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
- $0 \leq -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \iff \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$
- odmocněním dostáváme C-S nerovnost

## Norma indukovaná skalárním součinem

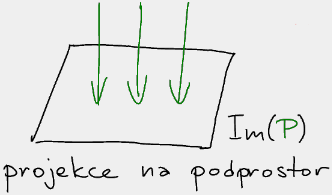
Zobrazení $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ je norma.

Důkaz:

- Linearita a nezápornost jsou triviální
  - plynou z linearity a positivní definitnosti skalárního součinu
- Trojúhelníková nerovnost $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
  - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$ … ekvivalentní (z nezápornosti)
    - $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$
  - $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$
  - Trojúhelníková nerovnost je ekvivalentní s C-S nerovností

- $P$ ... matice kolmé projekce na přímku
- Jak vypadá?
- $\mathbf{x} \to \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y},\mathbf{y}\rangle}\mathbf{y}$ ... ortogonální projekce na přímku
- $\mathbf{x} \to \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y} = \mathbf{x} \to \mathbf{y}\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{x}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$ ... prohození pořadí členů
  - $\frac{1}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{x}^T\mathbf{y}\mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}\mathbf{y}\mathbf{y}^T\mathbf{x}$
- $\implies P = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$
- projekce do obecného podprostoru složitější
  - $\implies$ přejděme nejprve k vlastnostem $P$

- Zaměřme se na $Im(P)$



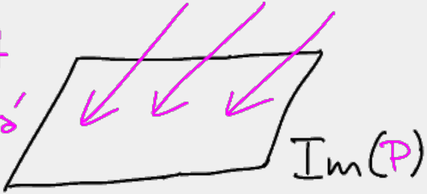

- 
  - $\forall \mathbf{y} \in Im(P)$ :
  - $P\mathbf{y} = \mathbf{y}$
  - $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ :
  - $P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$.
  - $\implies P^2 = P$

1. $Im(P)$ je fixován
   - $\forall \mathbf{y} \in Im(P) : P\mathbf{y} = \mathbf{y}$
   - $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : P(P\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$.
   - $\implies P^2 = P$

### Matice projekce

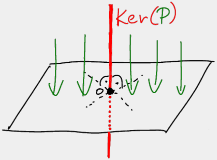
Matice $P$ je projekce na $Im(P)$, právě když $P^2 = P$.

nemusí být
obecně kolmá



# Jak zachytit ortogonalitu projekce?

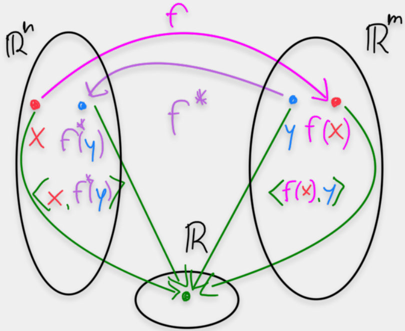
- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} - P\mathbf{x} \perp Im(P)$
  - > speciálně $\forall \mathbf{x} \in Ker(P) : \mathbf{x} - P\mathbf{x} = \mathbf{x} \perp Im(P)$
- $\implies Ker(P) \subseteq Im(P)^\perp = Ker(P^T)$
  - $\dim \mathcal{R}(P) + \dim Ker(P) = n = \dim Im(P) + \dim Ker(P^T)$
  - $\dim \mathcal{R}(P) = \dim Im(P)$
  - $\implies \dim Ker(P) = \dim Ker(P^T)$
- $Ker(P) = Ker(P^T)$
- $Im(P) = \mathcal{R}(P)$
- Chceme ukázat dokonce silnější: $P = P^T$



## Duální zobrazení

Pro libovolné lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existuje právě jedno lineární zobrazení $f^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, že platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle.$$



## Duální zobrazení $A^T$

Pro libovolné lineární zobrazení $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ a standardní skalární součin $\langle \bullet, \bullet \rangle$ platí

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{y} \rangle$$

tehdy a jen tehdy, když $B = A^T$.

Důkaz:

- Pokud $B = A^T$
  - $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$
- Žádná jiná $B$ to nesplňuje
  - rovnost platí pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \implies$ využijeme pro konkrétní $\mathbf{x}$
  - konkrétně pro vektory kanonické báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$

# Důkaz speciálního případu

## Duální zobrazení $A^T$

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{y}\rangle \implies B = A^T.$$

Důkaz:

- podívejme se na rovnost pro kanonické vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$
  - Proč?
  - $A\mathbf{e}_i = A_{*i}$ ... $i$-tý sloupec
  - $(A\mathbf{e}_i)_j = a_{ji}$ ... hodnota prvku
- $\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i, B\mathbf{e}_j\rangle$
  - $\langle A\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{e}_i)_k \cdot (\mathbf{e}_j)_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_i)_k \cdot (B\mathbf{e}_j)_k = \langle \mathbf{e}_i, B\mathbf{e}_j\rangle$
  - $(A\mathbf{e}_i)_j = \sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{e}_i)_k \cdot (\mathbf{e}_j)_k = (A\mathbf{e}_i)_j$ ... nenulové pro $k = j$
  - $(B\mathbf{e}_j)_i = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{e}_i)_k \cdot (B\mathbf{e}_j)_k = (B\mathbf{e}_j)_i$ ... nenulové pro $k = i$
- $a_{ji} = b_{ij} \implies B = A^T$

## Matice $P$ splňuje předchozí tvrzení

Pro matici ortogonální projekce $P$ platí: $\langle P\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, P\mathbf{y}\rangle$.

Důkaz:

- víme: $Ker(P) = Im(P)^{\perp}$
  - $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_I$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_K + \mathbf{y}_I$
    - $\mathbf{x}_K, \mathbf{y}_K \in Ker(P)$, $\mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I \in Im(P)$
- $\langle P\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_K + \mathbf{y}_I\rangle = \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_K\rangle + \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I\rangle = \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I\rangle$
  1. $P\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$
  2. $\langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_K\rangle = 0$ ... ortogonalita
- $\langle \mathbf{x}, P\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I\rangle = \langle \mathbf{x}_K, \mathbf{y}_I\rangle + \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I\rangle = \langle \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_I\rangle$
  1. $P\mathbf{y} = \mathbf{y}_I$
  2. $\langle \mathbf{x}_K, \mathbf{y}_\ell\rangle = 0$ ... ortogonalita

**Matice $P$ splňuje předchozí tvrzení**

Pro matici ortogonální projekce $P$ platí: $\langle P\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, P\mathbf{y}\rangle$.

Důsledek:

- Tedy platí $P = P^T$
- naopak pokud $P = P^T$
  - $\mathcal{R}(P) = Im(P)$
  - $\implies Ker(P) = Im(P)^\perp$
  - $\implies$ projekce je ortogonální

# Důsledek věty o dualitě na $P$

## Matice $P$ splňuje předchozí tvrzení

Pro matici ortogonální projekce $P$ platí: $\langle P\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, P\mathbf{y} \rangle$.

Důsledek:

- Tedy platí $P = P^T$
- naopak pokud $P = P^T$
  - $\mathcal{R}(P) = Im(P)$
  - $\implies Ker(P) = Im(P)^\perp$
  - $\implies$ projekce je ortogonální

## Ortogonální projekce

Projekce $P$ je ortogonální, právě tehdy, když $P = P^T$.

## Charakterizace matice ortogonální projekce

Lineární zobrazení reprezentované maticí $P$ je ortogonální projekce, právě tehdy když

1. $P^2 = P$ (projekce),
2. $P = P^T$ (ortogonální).

Brzy také:

- $P = A(A^T A^{-1})^{-1} A^T$
  - sloupce $A$ tvoří bázi $Im(P)$
- Speciální případ: $P = \frac{\mathbf{y}\mathbf{y}^T}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$