Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

February 27, 2023

Abstraktní definici skalárního součinu a normy

Konkrétní vs. abstraktní konstrukce

Matematické objekty lze konstruovat 2 způsoby:

1. konkrétně
   - popíšeme konstrukcí
   - příklad: minulé cvičení - skalární součin a norma
2. abstraktně
   - popíšeme vlastnostmi, které objekt musí splňovat
   - příklad: dnešní cvičení

- Norma $\|\bullet\|: ? \to ?$
  - $\|\bullet\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Skalární součin $\langle \bullet, \bullet \rangle : ? \to ?$
  - $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Jedná se o tzv. ***lineární formy***

- Norma $\|\bullet\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  1. **Linearita:** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$
  2. **Trojúhelníková nerovnost:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
  3. **Nezápornost:** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \geq 0$ a $\|\mathbf{x}\| > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- Skalární součin $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  1. **Linearita:**
     - 1.1 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$
     - 1.2 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : \langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
  2. **Symetrie:** $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
  3. **Positivní definitnost:** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- Poznámka: V $\mathbb{C}$ neplatí symetrie, ale $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$, jinak by byla potíž s 3.
  - $\overline{a + bi} = a - bi$ ... *komplexní sdružení*

Vztah mezi skalárním součinem a normou

- Každý skalární součin indukuje normu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
  - prozatím bez důkazu
  - 2. vlastnost zatím problematická na dokázání
  - pomůžeme si tzv. *Cauchyho-Schwarzovou* nerovností
  - příští cvičení
- **Naopak neplatí!**
  - existují normy, které neodpovídají žádnému skalárnímu součinu

Vztah mezi skalárním součinem a normou

- Každý skalární součin indukuje normu $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$
  - prozatím bez důkazu
  - 2. vlastnost zatím problematická na dokázání
  - pomůžeme si tzv. *Cauchyho-Schwarzovou* nerovnosti
  - příští cvičení
- **Naopak neplatí!**
  - existují normy, které neodpovídají žádnému skalárnímu součinu

Geometričnost vektorových prostorů:

otevřená okolí

skalární součin $\Rightarrow$ norma $\Rightarrow$ metrika $\Rightarrow$ topologie

navíc úhly a kolmost

linearita vzdálenosti

pouze trojúhelníková nerovnost

není přímo vzdálenost jako číslo, pouze blízkost

Příklady nestandardních skalárních součinů:

1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum c_i x_i y_i$
   - $c_1, \ldots, c_n > 0$ ... reálná čísla
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$
   - vlastnosti 1. a 2. snadné
   - 3. také platí
   - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + 2{x_2}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0$

- Dají se popsat maticemi
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$

Maticové zápisy skalárních součinů:

1. standardní skalární součin
   - $A = I_n$
2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum c_i x_i y_i$
   - $A = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$
3. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2x_2y_2$
   - $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

MATICOVÝ ZÁPIS $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$

Vyplývají 2 přirozené otázky:

1. Pro které *matice* A je $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalární součin?
2. Ja každý *skalární součin tohoto typu*?

1. Pro které *matice* A je $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ skalární součin?

- $\mathbf{x}^T A\mathbf{y} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ... bilineární forma
  - pro A obecnou
  - *bilineární* $\implies$ linearita (1.) je splněna
- aby platila symetrie (2.)
  - $A = A^T$
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}^T A\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- aby platila positivní definitnost (3.)
  - $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \neq 0$
  - A je positivně definitní
  - na konci semestru ukážeme o nich více

1. Pro které *matice* A je $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ skalární součin?

- $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ... bilineární forma
  - pro A obecnou
  - *bilineární* $\implies$ linearita (1.) je splněna
- aby platila symetrie (2.)
  - $A = A^T$
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}^T A\mathbf{y})^T = \mathbf{y}^T A^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- aby platila positivní semidefinitnost (3.)
  - $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \neq 0$
  - A je positivně definitní
  - na konci semestru ukážeme o nich více

Shrnutí

Kdykoli je A symetrická positivně definitní, je $\mathbf{x}^T A\mathbf{y}$ skalární součin

Jak je to s 2. otázkou: Je každý *skalární součin tohoto typu*?

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ "$\implies$" $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$

Libovolný skalární součin $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ je roven $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ pro nějakou symetrickou positivně definitní matici A.

Důkaz:

- Kódování zobrazení do matice
- Jak jsme to dělali pro lineární zobrazení?
  - nekonečně mnoho obrazů
  - ale: stačí ***obrazy báze***
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum \sum x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$
  - díky linearitě skalárního součinu
- Zbývá zkonstruovat matici A

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ " $\Longrightarrow$ " $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$

Libovolný skalární součin $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ je roven $\mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ pro nějakou symetrickou positivně definitní matici A.

Důkaz:

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum \sum x_i y_j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$
  - díky linearitě skalárního součinu
- Zbývá zkonstruovat matici A
- $\begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n \rangle \end{pmatrix}$
  - ***Gramova matice***
  - platí: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$
  - Symetričnost A vyplývá z 2.
  - Pozitivní definitnost plyne z 3.

- A ... symetrická positivně definitní matice
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$
  - $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_A}$
- Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Značení a geometrický význam

- A … symetrická positivně definitní matice
  - $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$
  - $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_A}$
- Jaký je geometrický význam těchto součinů/norem?

Charakterizace symetrických positivně definitních matic

Matice A je symetrická positivně definitní, právě když existuje ***Choleského rozklad*** $A = R^T R$, kde R je regulární matice.

Důkaz: na konci semestru

Charakterizace symetrických positivně definitních matic

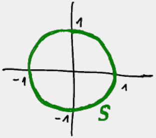
Matice A je symetrická positivně definitní, právě když existuje ***Choleského rozklad*** $A = R^T R$, kde R je regulární matice.

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_A = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{y} = (R\mathbf{x})^T (R\mathbf{y}) = \langle R\mathbf{x}, R\mathbf{y} \rangle$
- R je regulární $\implies$ $R \sim {}_{B_2}[id]_{B_1}$ ... matice přechodu
- $\implies$ **standardní součin vůči jiné bázi!**
- $\|\mathbf{x}\|_A = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_A} = \sqrt{\langle R\mathbf{x}, R\mathbf{x} \rangle} = \|R\mathbf{x}\|$
- $\implies$ **standardní norma vůči jiné bázi!**

- z linearity: $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$
- pro popis normy stačí *jeden bod z každé přímky*
- Norma je určena **jednotkovou sférou**

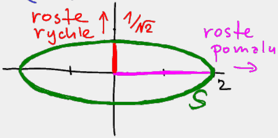
$$S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

standardní norma



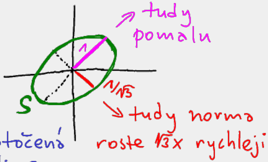
ve všech směrech stejná norma

$\begin{pmatrix} 1/4 & \\ & 2 \end{pmatrix}$ – norma



elipsa s osami v kanonických vektorech

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ – norma



pootočená elipsa

Jednotková sféra A-norem

Pro každou A-normu $\| \bullet \|_A$ je jednotková sféra S elipsoid.

- Osy elipsoidu ve směru ***vlastních vektorů*** A
- budeme probírat později
- zatím tedy bez důkazu

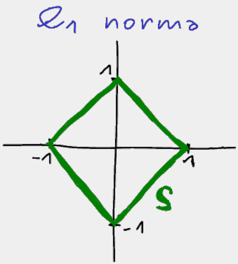
ℓ_p normy: $\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty]$

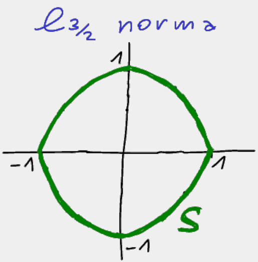
- ℓ_2 *standardní* norma
- ℓ_1 *manhattanská* norma $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- ℓ_∞ *maximová* norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

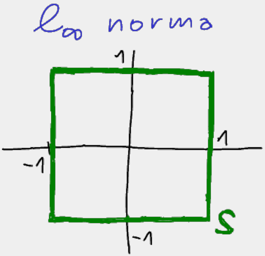
Nestandardní nestandardní normy ℓ_p

ℓ_p normy: $\|\mathbf{x}\|_{\ell_p} = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, \infty]$

- ℓ_2 standardní norma
- ℓ_1 manhattanská norma $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- ℓ_∞ maximová norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$







- obecně ještě méně pravidelná jednotková sféra
- $B = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ ... **jednotková koule**

Lemma o koulích

Pro libovolnou normu platí:

1. S obsahuje přesně dva body na každé přímce procházející počátkem
2. B je symetrická podle počátku
3. B je konvexní

Důkaz:Jako cvičení

1. vyplývá z linearity a nezápornosti normy
2. vyplývá z linearity a $\alpha = -1$
3. vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti

Charakterizace norem

Nechť B je uzavřená, omezená, konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, symetrická podle počátku. Nechť S je hranice B a $\mathbf{o} \notin S$. Potom je zobrazení $\|\bullet\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definované $\|\mathbf{x}\| = |\alpha|$, kde $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$ a $\mathbf{y} \in S$ norma v $\mathbb{R}^n$.

Důkaz: Jako cvičení.

- stačí ukázat, že splňuje axiomy normy. Nejtěžší trojúhelníková nerovnost.

Příklady obecných norem