Lineární algebra pro pokročilé

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

February 20, 2023

Standardní skalární součin a norma

Z minulého semestru:

- Vektorový prostor je *lineární obal* své ***báze***
- Steinitzova věta: "Existuje nekonečně mnoho bází"
- Otázka: Jakou bázi si vybrat?
- Odpověď: Chceme bázi, která je ***hezká***

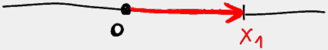
Motivace - příklad *hezké* báze

Kanonická báze

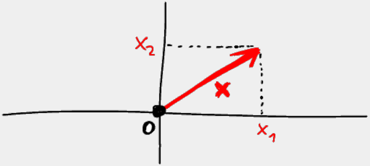
- prostor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ... standardní vektorový prostor
- $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ... kanonická báze
- Proč je hezká?
  1. *délka* vektorů je rovna 1
     - $\rightarrow$ ***norma***
  2. vektory jsou na sebe *kolmé*
     - $\rightarrow$ ***skalární součin***

Délka v $\mathbb{R}^n$ (standardní norma)

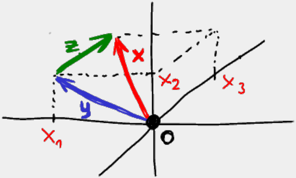
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{x}\|$ ... ***norma*** vektoru
- případ $\mathbb{R}^1$



  -
  - $\|x\| = |x_1|$
- případ $\mathbb{R}^2$



  -
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}$

- případ $\mathbb{R}^3$
  - 

  - $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2} = \sqrt{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}^2 + x_3{}^2} = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$
    - první rovnost plyne z *Pythagorovy věty*

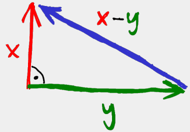
Délka v $\mathbb{R}^n$ (standardní norma)

- případ $\mathbb{R}^1$
  - $\|x\| = |x_1|$
- případ $\mathbb{R}^2$
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}$
- případ $\mathbb{R}^3$
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}$
- případ $\mathbb{R}^n$
  - $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2}$
  - důkaz indukcí podle n, podobně jako v případě $\mathbb{R}^3$

Kanonická báze

- prostor $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ... standardní vektorový prostor
- $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ... kanonická báze
- Proč je hezká?
  1. *délka* vektorů je rovna 1
     - $\rightarrow$ ***norma*** $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
  2. vektory jsou na sebe *kolmé*
     - $\rightarrow$ ***skalární součin***

- $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff$ platí *Pythagorova věta v trojúhelníku*



  -
  - $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$
  - $x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2 + y_1{}^2 + \cdots + y_n{}^2 = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2$
  - $0 = -2x_1y_1 - \cdots - 2x_ny_n$
- neboli $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \iff \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0.$

- $\mathbf{x}^T\mathbf{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ... ***standardní skalární součin***
  1. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$
     - **kolmost** (žádný společný směr)
  2. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} > 0$
     - **ostrý úhel** mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
  3. $\mathbf{x}^T\mathbf{y} < 0$
     - **tupý úhel** mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- platí: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$
- platí: $\mathbf{o} \perp \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x}$

Ortogonalita $\implies$ nezávislost

Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{o}$ a $\mathbf{x}_i \perp \mathbf{x}_j$ pro $i \neq j$.
Potom jsou $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé.

Důkaz:

- Nechť $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = 0$
- **vynásobnme zleva $\mathbf{x}_i{}^T$**
- dostáváme $\alpha_i \mathbf{x}_i{}^T \mathbf{x}_i = \alpha_i \|\mathbf{x}_i\|^2 = 0$
    - protože $\alpha_j \mathbf{x}_i{}^T \mathbf{x}_j = 0$
- $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{o} \implies \|\mathbf{x}_i\|^2 > 0$
- $\implies \alpha_i = 0$
- i volíme libovolné $\implies \forall i : \alpha_i = 0$

U, V ... vektorové podprostory

- $U \perp V \iff \forall \mathbf{u} \in U, \forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
  - $\forall$ se dá zredukovat na ortogonalitu dvou bází

Ortogonalita rozšířená na podprostory

U, V ... vektorové podprostory

- $U \perp V \iff \forall \mathbf{u} \in U, \forall \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
  - $\forall$ se dá zredukovat na ortogonalitu dvou bází

Ortogonalitu určuje báze

Nechť U, V jsou VP a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ jejich báze. Potom

$$U \perp V \iff \forall i, j : \mathbf{u}_i \perp \mathbf{v}_j.$$

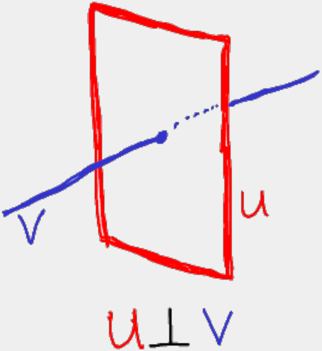
Důkaz:

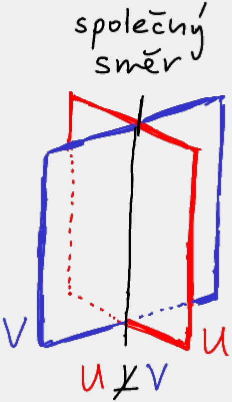
- $\Longleftarrow$
  - $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{u}_i \in U, \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{v}_j \in V$
  - $\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{u}_i{}^T \mathbf{v}_j = 0$
    - protože $\mathbf{u}_i{}^T \mathbf{v}_j = 0$ z předpokladu
- $\Longrightarrow$ triviální ($\forall \implies \forall$ z báze)

Intuice trochu naráží

U, V ... vektorové podprostory

- $U \perp V \iff \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V : \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$





$U^\perp := \{\mathbf{v} : \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \perp \mathbf{u}\}$ ... ortogonální doplněk

Vlastnosti ortogonálních doplňků

1. $U^\perp$ je vektorový podprostor.
2. $U \cap U^\perp = \{\mathbf{o}\}$, $\langle U \cup U^\perp \rangle = \mathbb{R}^n$, tedy $\dim U + \dim U^\perp = n$.
3. $(U^\perp)^\perp = U$.

Důkaz:

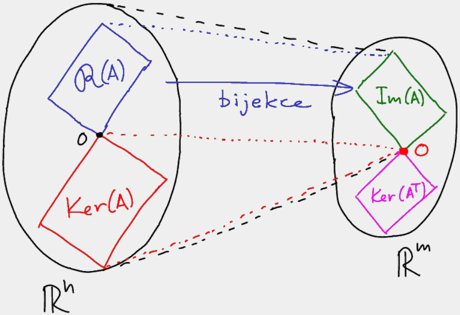
- 1. a 2. (první část) je snadné
- Dokažme $(U^\perp)^\perp \supseteq U$
  - každý $\mathbf{u} \in U$ je kolmý na $U^\perp$, tedy $\mathbf{u} \in (U^\perp)^\perp$

Zbytek důkazu později

- Zbytek zatím nedokážeme, potřebujeme znát o ortogonalitě více
- *Ortogonálních vektorů je **hodně***
  - konkrétně ortogonálních bází
  - obdoba Steinitzovy věty:
  - *Libovolná množina ortogonálních vektorů se dá rozšířit na ortogonální bázi*
- později během semestru

Fundamentální pro pochopení lineárního zobrazení $A : \mathbf{x} \to A\mathbf{x}$

- $\mathcal{R}(A) = Im(A^T)$
  - řádkový prostor
- $Ker(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$
  - kernel
- $Im(A) = \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$
  - obraz
- $Ker(A^T) = \{x : x^T A = \mathbf{o}\}$
  - levý kernel



Revize fundamentálních podprostorů

- Již víme:
  - $Ker(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ jsou lineárně nezávislé
  - $\dim Ker(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$
  - $Ker(A^T)$ a $Im(A)$ jsou lineárně nezávislé
  - $\dim Ker(A^T) + \dim Im(A) = m$
- Platí mnohem silnější:
  - $Ker(A)$ a $\mathcal{R}(A)$ jsou ortogonální doplňky
  - $Ker(A^T)$ a $Im(A)$ jsou ortogonální doplňky

Fundamentální podprostory a jejich doplňky

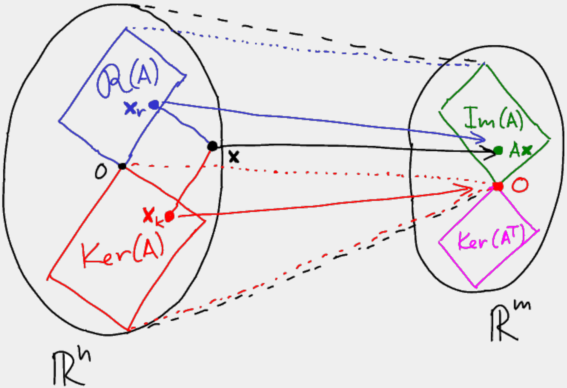
Platí $Ker(A) = \mathcal{R}(A)^\perp$, $Ker(A^T) = Im(A)^\perp$.

Důkaz:

- $Ker(A) \subseteq \mathcal{R}(A)^\perp$
  - označme řádky A jako $\mathbf{u}_1{}^T, \ldots, \mathbf{u}_m{}^T$
  - $\mathbf{x} \in Ker(A) \iff A\mathbf{x} = \mathbf{o}$
  - $\implies \mathbf{u}_1{}^T\mathbf{x} = 0, \ldots \mathbf{u}_m{}^T\mathbf{x} = 0$
  - $\implies \mathbf{u} \in \mathcal{R}(A) \perp \mathbf{x}$
- $Ker(A) \supseteq \mathcal{R}(A)^\perp$
  - $\mathbf{x} \perp \mathcal{R}(A) \implies A\mathbf{x} = \mathbf{o} \implies \mathbf{x} \in Ker(A)$

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ortogonální projekce:

- $\mathbf{x}_r \in \mathcal{R}(A)$
- $\mathbf{x}_k \in Ker(A)$
- $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_k$
- $A\mathbf{x}_r = A\mathbf{x}$
- $A\mathbf{x}_k = \mathbf{o}$



JEDNODUCHÝ DŮKAZ dim $\mathcal{R}(A) = \dim \mathit{Im}(A)$

- tedy $A \restriction \mathcal{R}(A)$ je *surjektivní zobrazení*
  - na $\mathit{Im}(A)$
- zároveň $A \restriction \mathcal{R}(A)$ je prosté
  - Proč?
    - pro spor není $\implies \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(A), \mathbf{x} \neq \mathbf{y} : A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$
    - $\implies A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{o}$
    - $\implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{R}(A) \cap \mathit{Ker}(A)$
    - $\implies$ spor, protože $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{o}$
- důsledek: $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathit{Im}(A)$