Domácí úlohy z lineární algebry 1

13. září 2022

Martin Černý

Na zápočet bude třeba získat aspoň 120 z 240 bodů z následujících úloh. Řešení úloh odevzdávejte e-mailem ve formátu PDF, nebo na začátku cvičení v libovolné čitelné podobě. Několik dalších poznámek:

- Na úlohách je možné spolupracovat a používat všechny možné dostupné zdroje. Řešení úloh musí nicméně sepsat a odevzdat každý sám za sebe.
- Řešením úlohy není pouze výsledek, ale řádně vysvětlený postup, jak jste k řešení došli, případně důkaz toho, co ve výsledku tvrdíte.
- Úlohy je možné odevzdávat i postupně v průběhu semestru, výhodou je, že budete mít zpětnou vazbu.
- V případě, že byste si nevěděli s domácími úkoly rady, nebo chtěli něco prodiskutovat, není problém se domluvit na konzultaci.
- Pokud chcete použít ve svém řešení výsledek, který se neobjevil na přednášce, je třeba ho řádně zadefinovat a případně dokázat jeho platnost.

(1) Gaussova a Gauss-Jordanova eliminace (25 bodů)

Deadline: 25. října 2022

1. **(3 bod)** Vyřešte následující soustavu rovnic pomocí Gaussovy a Gauss-Jordanovy eliminace

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ 2y + 3z &= 0 \\ 2x - 2y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

.

2. **(6 body)** Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a+3 & 2a+1 \\ 2a-1 & 2a+1 & a \end{array}\right).$$

3. **(6 body)** Může se při elementárních řádkových úpravách matice A objevit řádek r nebo s?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **(10 body)** Najděte soustavu 3×4 mající za řešení

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

(2) Maticové operace (40 bodů)

Deadline: 8. listopad 2022

1. **(3 bod)** Dokažte z definice, že platí $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
2. **(3 bod)** Dokažte, že $A^T A$ je symetrická matice pro každé $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
3. **(7 body)** Ukažte, že součin horních trojúhelníkových matic je zase horní trojúhelníková matice (A je horní trojúhelníková, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny $i > j$).
4. **(7 body)** Najděte čtvercovou matici řádu n splňující $I - A = A^2$.
5. **(10 body)** Najděte matici $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takovou, aby pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platilo
   - $BA = 5A$,
   - $BA = 5B$,
   - všechny řádky BA byly stejné jako první řádek A.
6. **(10 body)** Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *stochastická* (nebo též *markovská*) pokud její prvky leží v intervalu $[0, 1]$ a součet každého sloupce je 1. Dokažte, že součin stochastických matic je stochastická matice.

(3) Regulární matice a inverzní matice (34 bodů)

Deadline: 22. listopad 2022

1. **(7 bod)** Nechť má matice A na diagonále lichá čísla a mimo diagonálu čísla sudá. Může být A singulární?
2. **(7 bod)** Nechť má matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $n > 2$, na diagonále čísla $a \in \mathbb{R}$ a mimo diagonálu čísla $b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, pro která čísla a a b je matice A regulární.
3. **(7 bod)** Zjistěte, pro které n je matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, pokud jsou její prvky definovány následovně:
   - $a_{ij} = i \cdot j$,
   - $a_{ij} = i + j$.
4. **(3 bod)** Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, že $(ABA^{-1})^n = (AB^n A^{-1})$.
5. **(3 bod)** Najděte netriviální $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, která nemá žádný prvek nulový, splňující $A = A^{-1}$.
6. **(7 bod)** Dokažte, že $trace(A) = trace(BAB^{-1})$, kde $trace(A)$ je součet diagonálních prvků matice A.

(4) Grupy a Permutace (23 bodů)

Deadline: 6. prosinec 2022

1. **(7 bod)** Buď $\mathbb{IR}$ množina reálných uzavřených intervalů (t.j. $[a, b]$, takové že $a, b \in \mathbb{R}$ a $a \leq b$) s operacemi
$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$
$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [min(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2), max(a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2)] .$$
   Vyšetřete algebraické struktury $(\mathbb{IR}, +), (\mathbb{IR}, \cdot)$.
2. **(3 bod)** Buďte H_1, H_2 podgrupy grupy G. Ukažte, že také $H_1 \cap H_2$ je podgrupa.

3. **(10 bod)** Řešte soustavy rovnic bez prohazování řádků:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_3, \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ nad } \mathbb{Z}_2 \text{ a } \mathbb{Z}_5.$$

4. **(3 bod)** Spočítejte v $\mathbb{Z}_7$ mocninu matice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{100}$.

(5) Vektorové prostory (30 bodů)

Deadline: 20. prosinec 2022

1. **(20 bod)** Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:
   - $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{C}$,
   - $\mathbb{R}^\infty$ nad $\mathbb{C}$,
   - kladná reální čísla $\mathbb{R}^+$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = xy$ a $\alpha \bigodot x = x^\alpha$,
   - množina všech rotací v prostoru $\mathbb{R}^n$, kde součet je definován jako složení rotací a α-násobek jako rotace o α-násobný úhel.
2. **(3 bod)** Mějme U, V prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Může $U \cap V = \emptyset$?
3. **(7 body)** Rozhodněte, zda množina horních trojúhelníkových matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ t.j. matic U takových, že $(U)_{ij} = 0$ pokud $i > j$ tvoří vektorový prostor.

(6) Podprostory, lineární kombinace a nezávislost (41 bodů)

Deadline: 3. leden 2023

1. **(3 bod)** Bud $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rozodněte, zda $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ tvoří podprostor $\mathbb{R}^n$.
2. **(7 bodů)** Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:
   - $\left\{(s, s^2)^T : s \in \mathbb{R}\right\}$ prostoru $\mathbb{R}^2$
   - $\left\{(s, t)^T \in \mathbb{R}^2 : |s| = |t|\right\}$
3. **(7 bod)** Rozhodněte, zda $U = V$ pro
$$U = \mathit{span}\left\{(1, 2, 0)^T, (0, 1, -1)^T\right\}, V = \mathit{span}\left\{(2, 1, 3)^T, (-1, 0-2)^T\right\}.$$
4. **(10 bod)**Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor 2^M všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání je chápáno jako exkluzivní disjunkce (XOR) a násobky přirozeně.
   - Najděte nulový vektor.
   - Najděte $-v$ pro $v = \{a, b, c\}$.
   - Vyhodnoťte lineární kombinaci $u+v-w-z$, kde $u = \{a, d\}, v = \{b, e\}, w = \{c, e\}, z == \{a, b, c\}$.
5. **(7 bod)** Buďte u, v, w lineárně nezávislé vektory z protoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda jsou lineárně nezávislé:
   - $u, v + w$
   - $0, u, v$
   - $u + v$,$u - v$,$u + w$,$u - w$
   - $u - v$,$2v + w$,$-u - v - 3w$
6. **(7 bod)** Ukažte, že vektory $v_1, \ldots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, \sum_{i=1}^n v_i$ jsou lineárně nezávislé.

(7) Báze, souřadnice, lineární zobrazení a matice přechodu (47 bodů)

1. **(3 bod)** Najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi $x^2+1, x-2, 2x^2+x-1$.
2. **(10 bod)** $B_1 = \left\{(1,1,1)^T, (1,0,2)^T, (3,-1,2)^T\right\}, B_2 = \left\{(2,2,1)^T, (1,0,0)^T, (-1,0,2)^T\right\}$ tvoří 2 různé báze $\mathbb{R}^3$. Zkonstruujte matici přechodu ${}_{B_2}[id]_{B_1}$ a nalezněte souřadnice $[x]_{B_1}$,$[x]_{B_2}$, kde $x \in \mathbb{R}^3$.
3. **(7 bod)** Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2, je-li
$$B_1 = \left\{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\right\}, \ B_2 = \left\{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\right\}.$$
4. **(7 bod)** Najděte matici lineárního zobrazení zobrazující:
   - $(1,3)^T$ na $(4,-1)^T$,
   - $(1,3)^T$ na $(1,1)^T$,a $(2,6)^T$ na $(-1,-1)^T$.
5. **(10 bod)** Buď f lineární zobrazení a B_1, B_2, B_3, B_4 odpovídající báze.
   - Může ${}_{B_2}[id]_{B_1} = {}_{B_4}[id]_{B_3}$ pro $B_1 \neq B_3$ a $B_2 \neq B_4$?
   - Ovlivní nějak předchozí otázku, pokud f je isomorfismus?
6. **(10 bod)** Určete ${}_{kan}[f \circ g]_{kan}$ pro lineární zobrazení $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná
$$f(a,b,c) = (a-c, b-a, b+c)^T, \ g(a,b,c) = (a+b+c, b+c, c)^T.$$