Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

July 11, 2022

Férovost v modelu kooperativních her

Co je nejférovější rozdělení zisku?

- projdeme stávající koncepty
- představíme nové
- naučíme se je porovnávat
- představíme model, který kombinuje různé představy hráčů o férovosti

Shapleyho hodnota

Pro (N, v) je Shapleyho hodnota $\phi(v)$ určena jako

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)]$$

- je uvažován jako férový koncept řešení (diskutováno dříve)
- často neleží v jádře

Nukleolus

Pro kooperativní hru (N, v) je **nukleolus** $\eta(v)$

$$\eta(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid \theta(y) \succeq_{lex} \theta(x) \text{ pro } y \in \mathcal{I}(v)\}.$$

- η je *férový* výběr z jádra
- pro mnoho her: $\phi(v) \neq \eta(v)$

1. b^v ... **utopický vektor (utopia vector)**
   - $b_i^v := v(N) - v(N \setminus i)$
   - *Větší nárok nepřipadá v úvahu...*
     - $v(N \setminus i) > v(N) - b_i^v$
     - vznikne koalice $N \setminus i$
2. a^v ... **vektor minimálního nároku (minimal right vector)**
   - svět není utopie: $\sum_{j \in N} b_j^v > v(N)$
   - $a_i^v := \max\limits_{S: i \in S} v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} b_j^v$
     2.1 hráčům z $S \setminus i$ vyplať jejich maximální nárok
     2.2 vezmi si zbytek
   - najdi nejvýhodnější takovou koalici S
     - minimální nárok

- pro $x \in \mathcal{C}(v)$
  - $a_i^v \leq x_i \leq b_i^v$
- volíme eficientní kompromis...

τ hodnota

τ **hodnota** $\tau(v)$ kooperativní hry (N, v) je definovaná jako konvexní kombinace vektorů a^v and b^v splňující $\sum_{i \in N} \tau(v)_i = v(N)$.

- $a^v(N) \leq v(N) \leq b^v(N)$ platí pro *kvazibalancované hry*

Hodnoty **jsou** férové...:

- ϕ ke často využívána jako férový koncept řešení (již diskutováno)
- η je *férový* výběr z jádra
- τ hodnota je také volena jako férové řešení pro kvazibalancované hry

...nebo ne?

- ϕ a τ často **nejsou** součástí jádra
- v mnoha případech: $\phi(v) \neq n(v) \neq \tau(v)$
- Kterou hodnotu zvolit?

"Pokud mohu, tak se podělím"

Bilaterální přenos

Čtveřice (i, j, α, x) je ***bilaterální přenos (bilateral transfer)*** , pokud

$$x_i - \alpha \geq x_j + \alpha.$$

- i, j ... já a ty
- $x \in I(v)$ ... Co dostaneme
- $\alpha \geq 0$ ... o co se s tebou podělím

Rovnostářské jádro

"... ale musí jít o stabilní přenos."

Rovnostářské jádro

Imputace $x \in C(v)$ je ***rovnostářská (egalitarian)*** pokud *neexistuje* $y \in C(v)$, která by byla výsledkem bilaterálního přenosu (i, j, α, x).

"Ať už děláš cokoliv, toto je nejlepší možný výsledek..."

Silně rovnostářské jádro

Imputace $x \in C(v)$ je ***silně rovnostářská (strongly egalitarian)*** pokud *neexistuje* $y \in C(v)$, která by byla výsledkem konecně mnoha bilaterálních přenosů.

Rozdíly v definici

rovnostářské jádro $\mathcal{C}_E(v)$

- existuje, pokud $C(v) \neq \emptyset$
- vícebodové řešení
- $\mathcal{C}_{SE} \subseteq \mathcal{C}_E$

silně rovnostářské jádro $\mathcal{C}_{SE}(v)$

- jednobodové řešení
- řešení metody nejmenších čtverců:
- $\min\limits_{y \in \mathcal{C}(v)} \|y\|_2$

$\mathcal{C}_E$ JAKO FÉROVÝ KONCEPT ŘEŠENÍ

1. **férové** díky *bilaterálním přenosům*
2. **rozumné** díky stabilitě *jádra*

H

ra dvou hráčů (N, v), kde $v(1) = 1, v(2) = 0$ a $v(12) = 2$.

$\mathcal{C}_E(v) = \{(1, 1)^T\}$ ... proč by měl 1 spolupracovat?

$\phi(v) = (1.5, 0.5)^T$ ... toto je *více hér*

- Dalo by se říci: "S férovostí to *přehání*..."

Predikáty férovosti

Predikát

Predikát kooperativní hry n hráčů je zobrazení $\mathcal{P}$, které přiřadí každé hře podmnožinu $\mathcal{P}(v) \subseteq \mathcal{I}(v)$.

Predikát férovosti

- podmnožina $\mathcal{I}(v)$
- sám o sobě **nedává** *smysl*:
- Dummy player predikát *DP*
  - vyloučí $x \in \mathcal{I}(v) : x_i > 0$ pro i s přínosem 0
  - samo o sobě neurčuje *rozumné* výplaty

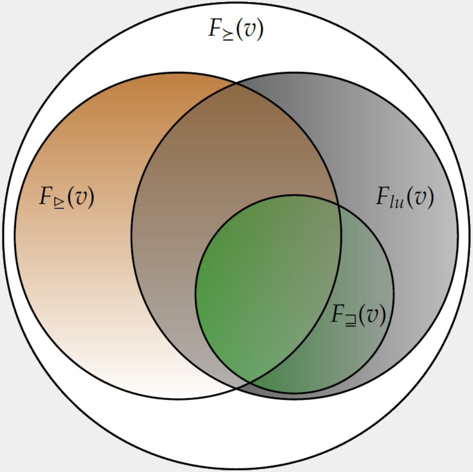
Koncept řešení

- podmnožina $\mathcal{I}(v)$ (obvykle)
- sám o sobě **dává** *smysl*:
- Shapleyho hodnota
  - *férové* rozdělení zisku dáno vlastnostmi (EFF, ADD, DP, SYM)
  - představuje zajímavý způsob výplaty

Férovost založena na žádoucnosti (desirability)

"Čím více skupině přinášíš, tím lépe jsi ohodnocen."

4 predikáty žádoucnosti:



ŽÁDOUCNOST HRÁČŮ $F_{\succeq}(v)$

"Čím více skupině přinášíš, tím lépe jsi ohodnocen."

Relace žádnoucnosti hráče

Relace žádoucnosti hráče (Player desirability relation) $i \succeq j$ značí, že hráč i je více žádoucí, než hráč j, tj.

$$v(A \cup \{i\}) \geq v(A \cup \{j\}) \text{ pro } A \subseteq N \setminus i, j.$$

Player desirability-fair

Imputace $x \in \mathcal{I}(v)$ je ***fér vzhledem k relaci žádoucnosti hráče (player desirability-fair)***, pokud

$$i \succeq j \implies x_i \geq x_j.$$

Množinu všech takových x značíme $F_{\succeq}(v)$.

Výsledky o predikátu $F_{\succeq}(v)$

Pro kooperativní hru (N, v) platí následující:

1. $Ker(v) \subseteq F_{\succeq}(v)$,
2. $\eta(v) \in F_{\succeq}(v)$,
3. (N, v) je kvazi-balancovaná $\implies$ τ-value $\tau(v) \in F_{\succeq}(v)$,
4. (N, v) superaditivní $\implies$ Shapley value $\phi(v) \in F_{\succeq}(v)$,
5. If $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset \implies \emptyset \neq \mathcal{C}_E(v) \subseteq F_{\succeq}(v)$.

Otevřené problémy:

- Co další koncepty řešení? (Bargaining set, prekernel, ...)
- Opačné implikace v 3., 4.?
- ...

Slabá žádoucnost hráče $F_{\trianglerighteq}(v)$

"Nevím, jestli to platí, ale cítím se tak..."

- **žádoucnost**: $i \succeq j \implies v(A \cup \{i\}) \geq v(A \cup \{j\})$ for $A \subseteq N \setminus i, j$
- $\#$ podmínek: 2^{n-2}
- Problém: Jak se o tom hráči přesvědčí?
  - těžko testovatelné už pro relativně malý počet hráčů
  - Řešení: ***přesvědčení*** **založíme na podmnožině podmínek**

1. *Individální hodnoty*
   - $v(i) \geq v(j)$
     - odpovídá podmínce pro $A = \emptyset$
2. *marginální přínosy do grandkoalice N*
   - $v(N) - v(N \setminus i) \geq v(N) - v(N \setminus j)$
     - odpovídá podmínce pro $A = N \setminus \{i, j\}$
     - $v(A \cup i) \geq v(A \cup j)$
     - $v(N \setminus j) \geq v(N \setminus i)$

Slabá žádoucnost hráče $F_{\trianglerighteq}(v)$

Player weak desirability-fair

Relace slabé žádoucnosti hráče (Player weak desirability relation) $i \trianglerighteq j$ označuje, že hráč i je více žádoucí (v slabém smyslu) než j, tj.

$$v(i) \geq v(j) \text{ and } v(N \setminus i) \leq v(N \setminus j).$$

Weak desirability-fair

Imputace $x \in \mathcal{I}(v)$ ***fér vzhledem k relaci slabé žádoucnosti hráče (weak deirability-fair)***, pokud

$$i \trianglerighteq j \implies x_i \geq x_j.$$

Množinu všech takových x značíme $F_{\trianglerighteq}(v)$.

VZTAH PREDIKÁTŮ $F_{\trianglerighteq}(v)$ A $F_{\succeq}(v)$

- $i \trianglerighteq j$ je slabší než $i \succeq j$
  - $\trianglerighteq$: 2 podmínky splněny $\implies x_i \geq x_j$
  - $\succeq$: 2^{n-2} podmínek splněno $\implies x_i \geq x_j$
- $i \succeq j \implies i \trianglerighteq j$
- Pokud (N, v) splňuje $i \succeq j$, potom také $i \trianglerighteq j$
  - jak $F_{\succeq}(v)$, tak $F_{\trianglerighteq}(v)$ obsahují jen x, že $x_i \geq x_j$
- (N, v) může splňovat $i \trianglerighteq j$, ale ne $i \succeq j$
  - $F_{\trianglerighteq}(v)$ je omezeno na x, že $x_i \geq x_j$, ale $F_{\succeq}(v)$ nemusí

$F_{\trianglerighteq}(v)$ A KONCEPTY ŘEŠENÍ

"Je to zajímavý predikát? Nikdo ještě příliš neví..."

Vlastnosti slabé žádoucnosti

Pro kooperativní hru (N, v) platí následující:

1. (N, v) je 1-konvexní $\implies \tau(v) \in F_{\trianglerighteq}(v) \cap C(v)$,
2. (N, v) je *kvazi-balancovaná* a platí *drobná podmínka* $\implies \tau(v) \in F_{\trianglerighteq}(v)$.

Otevřené problémy:

- **V podstatě vše ostatní!**

Žádoucnost koalic $F_{\sqsupseteq}(v)$

"Když koalice nahradí hráče..."

Desirability relation on coalitions

Relace žádoucnosti koalice (desirability relation on coalitions)
$A \sqsupseteq B$ značí, že koalice A je více žádoucí, než koalice B, tj.

$$v(C \cup A) \geq v(C \cup B) \text{ pro všechna } C \subseteq N \setminus (A \cup B).$$

Coalition desirability-fair

Imputace $x \in \mathcal{I}(v)$ je ***fér vůči žádoucnosti koalic (coalition desirability-fair)***, pokud splňuje

$$A \sqsupseteq B \implies x(A) \geq x(B).$$

Množinu všech takových x značíme $F_{\sqsupseteq}(v)$.

Žádoucnost koalic $F_{\sqsupseteq}(v)$

"Příliš silná vlastnost koalic..."

- $i \succeq j \iff \{i\} \sqsupseteq \{j\}$
  - $F_{\sqsupseteq}(v) \subseteq F_{\succeq}(v)$
- existují hry (N, v), že:
  - $F_{\sqsupseteq}(v) \cap C(v) = \emptyset$
  - $\tau(v) \notin F_{\sqsupseteq}(v)$
  - $\phi(v) \notin F_{\sqsupseteq}(v)$
  - $n(v) \notin F_{\sqsupseteq}(v)$

Žádoucnost odborových svazů $F_{lu}(v)$

- stejný problém jako při $\succeq$:
  - řádově 2^n podmínek
- Cíl: vybrat rozumnou podmnožinu podmínek
  - koalice hráčů K (*odborový svaz*)
  - $K \sqsupseteq \{i\}$ (*vlastník továrny* i)
  - $x(K) \geq x_i$ (K: "Nejsme otroci!")

Odborové svazy

Imputace $x \in \mathcal{I}(v)$ je **fér vzhledem k odborovým svazům**, pokud

1. $K \sqsupseteq \{i\} \implies x(K) \geq x_i$,
2. $x \in F_{\succeq}(v)$.

Množinu všech takových x značíme $F_{lu}(v)$.

"Aspoň rovnostářské jádro je spravedlivé k dělníkům..."

$F_{lu}(v)$ a koncepty řešení

$\mathcal{C}_E \subseteq F_{lu}(v)$ pro konvexní hry (N, v).

Další výsledky:

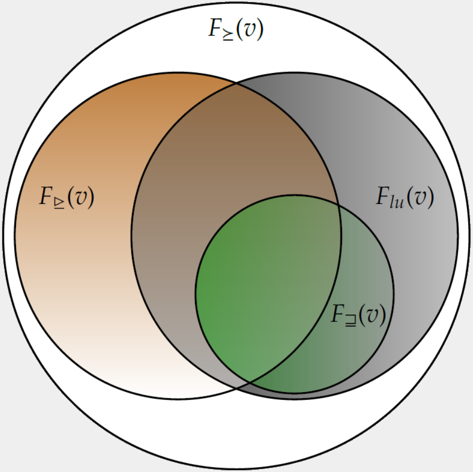
- dílčí výsledky pro ϕ, η, τ

Otevřené otázky:

- vztahy ke zbytku konceptů řešení
- jiné struktury jako $F_{lu}(v)$

"Čím více skupině přinášíš, tím lépe jsi ohodnocen."

4 predikáty žádoucnosti:



Kombinace více pojmů férovosti

"Co je pro Tebe fér?"

- Modifikace jádra $\mathcal{C}(v)$
- $x \in \mathcal{C}(v) \implies x(S) \geq v(S)$ pro všechny $S \subseteq N$
- pokud se S nezformuje (nedohodne se na tom, co je fér)
    1. proč bychom ji měli uvažovat v rámci podmínek?
        - proč nepovolit $y \notin C(v)$?
    2. proč bychom se měli shodnout na x?
        - naše pohledy na férovost mohou $x \in C(v)$ úplně vyblokovat
- moje férovost $=$ moje **kultura** (kulturní identifikace)
- *Jak nás naše kulturní rozdílnosti ovlivňují?*

Stability vzhledem k férovosti

- F_i ... predikát férovosti (**Kulturní identifikace hráče i**)
- $F_i(w)$ ... přípustné imputace pro hráče i v (N, w)
  - imputace mimo $F_i(w)$ **nevedou** ke spolupráci

- F_i ... predikát férovosti (**Kulturní identifikace hráče i**)
- $F_i(w)$ ... přípustné imputace pro hráče i v (N, w)
  - imputace mimo $F_i(w)$ **nevedou** ke spolupráci

Koalice S je **kulturně kompatibilní** (ve hře (N, v)), pokud

1. $S = \{i\}$,
2. nebo existuje $x \in \cap_{i \in S} F_i(v_S)$:
   2.1 $x(S) = v_S(S)$
   2.2 $x(A) \geq v_S(A)$ pro všechny **kulturně kompatibilní** $A \subseteq S$

- $CC(v)$ ... kulturně kompatibilní koalice hry (N, v)

- F_i ... predikát férovosti (**Kulturní identifikace hráče i**)
- $F_i(w)$ ... přípustné imputace pro hráče i v (N, w)
  - imputace mimo $F_i(w)$ **nevedou** ke spolupráci

Koalice S je **kulturně kompatibilní** (ve hře (N, v)), pokud

1. $S = \{i\}$,
2. nebo existuje $x \in \cap_{i \in S} F_i(v_S)$:
   2.1 $x(S) = v_S(S)$
   2.2 $x(A) \geq v_S(A)$ pro všechny **kulturně kompatibilní** $A \subseteq S$

- $CC(v)$ ... kulturně kompatibilní koalice hry (N, v)

Kulturně kompatibilní jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **kulturně kompatibilní jádro** $\mathcal{C}_{cc}$

$$\mathcal{C}_{cc}(v) = \{x \in \cap_{i \in N} F_i(v) \big| x(N) = v(N) \text{ and } x(A) \geq v(A), \forall A \in CC(v)\}.$$