# Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

July 11, 2022

# Zobecněné modely kooperace

### Kooperativní hra

**Kooperativní hra** $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* kooperativní hry. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

Nevýhody modelu kooperativních her:

1. **ne vždy nám jde o zformování** $N$
   - chceme zkoumat formování více koalic
2. **ne každá koalice dává smysl**
   - $\{H, I\}$ ... hardware + IT support
   - proč by měla být uvažována $x(\{H, I\}) \geq v(\{H, I\})$?
3. $2^n$ **reálných hodnot určující** $v$
   - 3.1 nereálné (nákladné) získat veškerou informaci
   - 3.2 drahé ukládat veškerou informaci
4. **ne vždy je model dostačující**
   - těžko modelovat komplexnější situace

## Kooperativní hra

**Kooperativní hra** $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* kooperativní hry. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

Nevýhody modelu kooperativních her:

1. **ne vždy nám jde o zformování** $N$
   - Hry s koaliční strukturou
2. **ne každá koalice dává smysl**
   - Omezené hry *(restricted games)*
3. $2^n$ **reálných hodnot určující** $v$
   - Modely neurčitosti
   - Modely s *kompaktní* charakteristickou funkcí
4. **ne vždy je model dostačující**
   - Bi-kooperativní hry a hry s překrývajícími se koalicemi

# 1. NE VŽDY JDE O ZFORMOVÁNÍ *N*

- Cíl: Zkoumat kooperaci mimo $N$

### Kooperativní hra s koaliční strukturou

**Kooperativní hra s koaliční strukturou** $(N, v, \mathcal{B})$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů , $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* a $\mathcal{B}$ je rozklad $N$ na disjunktní podmnožiny. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

- $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_k\}$
  - $B_i$ ... vzniklé kooperace hráčů
- Jak vypadá rozdělení zisků těchto her?

- Cíl: Zkoumat kooperaci mimo $N$

### Kooperativní hra s koaliční strukturou

**Kooperativní hra s koaliční strukturou** $(N, v, \mathcal{B})$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů , $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* a $\mathcal{B}$ je rozklad $N$ na disjunktní podmnožiny. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

- Jak vypadá rozdělení zisků těchto her?
- $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(B_i) = v(B_i) \text{ pro } B_i \in \mathcal{B} \text{ a } x_i \geq v(i) \text{ pro } i \in N\}$

# Hry s koaliční strukturou - spravedlivé řešení

- Pokud je $f(v) : \Gamma^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}^n$ jednobodový koncept řešení splňující

1. (AXIOM RELATIVNÍ EFICIENCE)
   - $\forall B_j \in \mathcal{B} : \sum_{i \in B_j} f_i(v) = v(B_j)$
   - *Mezi hráče rozdělujeme zisk jejich koalice.*
2. (AXIOM SYMETRIE)
   - $\forall \sigma \in \Sigma_n (\forall i, j : i \in B_j \implies \sigma(i) \in B_j) \implies f(v_\sigma)(S) = f(v)(\sigma(S))$
     - $v_\sigma(S) := v(\sigma(S))$
     - $\sigma(S) := \{\sigma(\ell) \mid \ell \in S\}$
   - *Rozdělení zisku je invariantní na pojmenování hráčů.*
3. (AXIOM NULOVÉHO HRÁČE)
   - $\forall i \in N : (\forall S \subseteq N : v(S) = v(S \cup i)) \implies f_i(v) = 0$
   - *Bez práce nejsou koláče.*
4. (AXIOM ADITIVITY)
   - $\forall v, w \in \Gamma^n : f(v + w) = f(v) + f(w)$
   - *Rozdělení na jednodušší hry vede ke stejným výplatám.*

- poté je **určen jednoznačně!**

## Kooperativní hra s koaliční strukturou

**Kooperativní hra s koaliční strukturou** $(N, v, \mathcal{B})$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů , $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* a $\mathcal{B}$ je rozklad $N$ na disjunktní podmnožiny. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

- Jak vypadá rozdělení zisků těchto her?
- $\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(B_i) = v(B_i)$ pro $B_i \in \mathcal{B}$ a $x_i \geq v(i)$ pro $i \in N\}$

## Shapleyho hodnota

Pro kooperativní hru s koaliční strukturou $(N, v, \mathcal{B})$ je Shapleyho hodnota $\phi_{\mathcal{B}}\colon \Gamma^n_{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}^n$ definována pro $i \in \mathcal{B}_j$ jako

$$\phi_{\mathcal{B}}(v)_i := \phi(v_{B_j})_i.$$

- Rozpadne se na řešení $(B_1, v_{B_1}), (B_2, v_{B_2}), \ldots, (B_k, v_{B_k})$
- U řady zobecněných konceptů řešení dost podobné

# 2. Ne každá koalice dává smysl

# Omezené hry (restricted games)

- Cíl: Vzít v úvahu *nesmyslnost* některých koalic

## Omezená kooperativní hra

**Omezená kooperativní hra** $(N, v, \mathcal{F})$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů , $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* a $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ je množina přípustných koalic. Platí, že $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $v(\emptyset) = 0$.

- Jak vypadá rozdělení zisků těchto her?

# Omezené hry (restricted games)

- Cíl: Vzít v úvahu *nesmyslnost* některých koalic

## Omezená kooperativní hra

**Omezená kooperativní hra** $(N, v, \mathcal{F})$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů , $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* a $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ je množina přípustných koalic. Platí, že $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $v(\emptyset) = 0$.

- Jak vypadá rozdělení zisků těchto her?

## Jádro omezených her

Pro omezenou kooperativní hru $(N, v, \mathcal{F})$ je jádro $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ definována jako

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \in \mathcal{F}\}.$$

- Netřeba uvažovat $x(S) \geq v(S)$ pro $S \notin \mathcal{F}$

# 3.1 Nereálné (nákladné) získat veškerou informaci

## Modely zaměřené na neurčitost

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné
    1. přesně
    2. levně
    3. vůbec

  Možné modely:
    - intervalové hry
    - neúplné hry
    - stochastické hry

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné přesně
  - $\mathbb{IR}$ ... množina reálných uzavřených intervalů
  - $\mathbf{x} \in \mathbb{IR} : \mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$

### Kooperativní intervalová hra

Kooperativní intervalová hra $(N, w)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $w\colon 2^N \to \mathbb{IR}$ je charakteristická funkce. Platí, že $w(\emptyset) = [0, 0]$.

- Dva přístupy k řešení:
  1. Slabé uspořádání
     - $x, y \in \mathbb{IR} : x \succeq y \iff \underline{x} \geq \underline{y}$ a $\overline{x} \geq \overline{y}$
  2. Selekce
     - $(N, v)$ je **selekce** $(N, w)$, pokud $v(S) \in w(S)$ pro $\forall S \subseteq N$

- Spíše teoretického rázu...

## Intervalová imputace

Množina **intervalových imputací** $\mathcal{I}(w)$ kooperativní intervalové hry $(N, w)$ je definována jako

$$\mathcal{I}(w) := \{(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n) \in \mathbb{IR}^n \mid \sum_{i \in N} \mathbf{I}_i = w(N), \mathbf{I}_i \succeq w(i), \forall i \in N\}.$$

## Intervalová jádro

**Intervalové jádro** $\mathcal{C}(w)$ kooperativní intervalové hry $(N, w)$ je definována jako

$$\mathcal{C}(w) := \{(\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_n) \in \mathcal{I}(w) \mid \sum_{i \in S} \mathbf{I}_i \succeq w(S), \text{ pro } S \subseteq N\}.$$

# Kooperativní intervalová hra - Selektivní přístup

- Výčet všech možností...

## Intervalově-selektivní imputace

Množina **intervalově-selektivních imputací** $\mathcal{SI}(w)$ kooperativní intervalové hry $(N, w)$ je definována jako

$$\mathcal{SI}(w) := \bigcup\{\mathcal{I}(v) \mid (N, v) \text{ je selekce } (N, w)\}.$$

## Intervalově-selektivní jádro

**Intervalově-selektivní jádro** $\mathcal{SC}(w)$ kooperativní intervalové hry $(N, w)$ je definována jako

$$\mathcal{SC}(w) := \bigcup\{\mathcal{C}(v) \mid (N, v) \text{ je selekce } (N, w)\}.$$

- Rozdíl mezi $\mathcal{C}(w)$ a $\mathcal{SC}(w)$:
  - $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(w) \implies \mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$
  - $x \in \mathcal{SC}(w) \implies x \in \mathbb{R}^n$
- Otázky:
  1. popis $\mathcal{C}(w)$ a $\mathcal{SC}(w)$
  2. kdy $\mathcal{C}(w) = \mathcal{SC}(w)$?
     - 2.1 platí $\mathcal{SC}(w) \subseteq \mathcal{C}(w)$ pro každou hru?
     - 2.2 ...

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné
  - případně nákladné, náročné

## Neúplná kooperativní ha

Neúplná kooperativní hra $(N, \mathcal{K}, v)$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů, $\mathcal{K} \subseteq 2^N$ je množina koalic se známou hodnotou a $v\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $\emptyset \in \mathcal{K}$ a $v(\emptyset) = 0$.

- Porovnání s omezenou hrou $(N, \mathcal{F}, v)$:
  - stejný model
  - jiná interpretace $\mathcal{F}$ a $\mathcal{K}$
    - $\mathcal{F}$ ... připustné koalice, **jiné není možné** zformovat
    - $\mathcal{K}$ ... známé koalice, hodnoty **jiných neznáme**

# Neúplná kooperativní hra

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné
  - případně nákladné, náročné

## Neúplná kooperativní ha

Neúplná kooperativní hra $(N, \mathcal{K}, v)$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů, $\mathcal{K} \subseteq 2^N$ je množina koalic se známou hodnotou a $v\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $\emptyset \in \mathcal{K}$ a $v(\emptyset) = 0$.

- Otázky:
  1. *Jak původně vypadala hra, pokud o ní vím něco navíc?*
     - $\implies$ C-extenze
  2. *Jak rozdělit zisk mezi hráče na základě neúplné informace?*
     - slabé a silné koncepty řešení

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné
  - případně nákladné, náročné

## Neúplná kooperativní ha

Neúplná kooperativní hra $(N, \mathcal{K}, v)$ je trojice, kde $N$ je množina hráčů, $\mathcal{K} \subseteq 2^N$ je množina koalic se známou hodnotou a $v \colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $\emptyset \in \mathcal{K}$ a $v(\emptyset) = 0$.

- $C \subseteq \Gamma^n$ ... třída kooperativních her

## $C$-extenze

Kooperativní hra $(N, w)$ je $C$-extenze, pokud $(N, w) \in C$ a platí

$$w(S) = v(S) \text{ pro všechny } S \in \mathcal{K}.$$

- Cíl: Analýza množiny všech $C$-extenzí

# Neúplná kooperativní hra - Slabý a silný koncept řešení

- $B^n(v)$ ... množina balancovaných extenzí $(N, \mathcal{K}, v)$

*Nechceme nic opomenout...*

## Slabé jádro neúplné hry

Slabé jádro $\bigcup \mathcal{C}$ neúplné hry $(N, \mathcal{K}, v)$ je definováno jako

$$\bigcup \mathcal{C}(v) := \bigcup_{(N,w) \in B^n(v)} \mathcal{C}(w).$$

*Chceme mít jistotu, že volíme jen to jisté...*

## Silné jádro neúplné hry

Silné jádro $\bigcap \mathcal{C}$ neúplné hry $(N, \mathcal{K}, v)$ je definováno jako

$$\bigcap \mathcal{C}(v) := \bigcap_{(N,w) \in B^n(v)} \mathcal{C}(w).$$

- Cíl: Modelovat situaci, kdy určení $v(S)$ není možné
  - $\zeta$ ... náhodná proměnná
  - $Y_\zeta$ ... obor hodnot $\zeta$

### Stochastická kooperativní hra

Stochastická kooperativní hra $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon 2^N \times Y_\zeta \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce.

- Cíl: Kompaktní reprezentace $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$
  - $G = (N, E, w)$ ... ohodnocený graf
    - $N$ ... vrcholy
    - $E$ ... hrany
    - $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ ... váhová funkce

### Grafová kooperativní hra

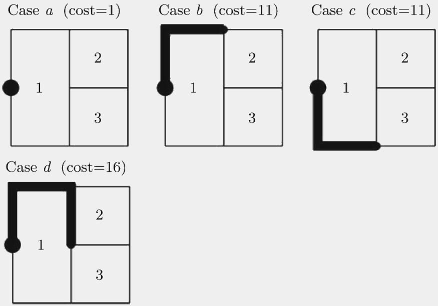
Grafová kooperativní hra $(G, v)$ je dvojice, kde $G = (N, E, w)$ je ohodnocený graf a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce definovaná jako

$$v(S) := \sum_{i,j \in S : \{i,j\} \in E} w(\{i,j\}).$$

# 4. Další zobecnění modelů kooperativních her

# Bi-kooperativní hry - motivace

- Situace: Farmáři budují společný zavlažovací systém




-

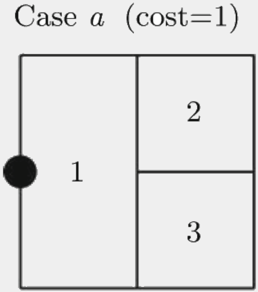
- Cíl: Zachytit kladné a záporné *přispěvatele* do hry
  - $\mathcal{Q}(N) = \{(S, T) \mid S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset\}$

### Bi-kooperativní hra

Bi-kooperativní hra $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon \mathcal{Q}(N) \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $v(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Příklad:

- $v(S, T)$ ... cena potrubí, pokud
  - $S$ ... chtějí zavést vodu k jejich pozemku
  - $T$ ... chtějí vodu a dovolí potrubí skrz pozemek

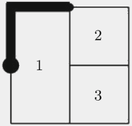



- 
  - $v(\{1\}, \emptyset) = v(\emptyset, \{1\}) = 1$

Příklad:

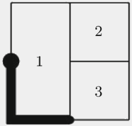
- $v(S, T)$ … cena potrubí, pokud
  - $S$ … chtějí zavést vodu k jejich pozemku
  - $T$ … chtějí vodu a dovolí potrubí skrz pozemek

Case $b$ (cost=11)

- 

  - $v(\{1,2\},\emptyset) = v(\{1\},\{2\}) = v(\{2\},\emptyset) = 11$

Case $c$ (cost=11)

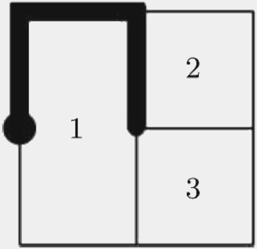
- 

  - $v(\{1,3\},\emptyset) = v(\{1\},\{3\}) = v(\{3\},\emptyset) = 11$

Příklad:

- $v(S, T)$ ... cena potrubí, pokud
  - $S$ ... chtějí zavést vodu k jejich pozemku
  - $T$ ... chtějí vodu a dovolí potrubí skrz pozemek

Case $d$ (cost=16)




- 
  - $v(\{1, 2, 3\}, \emptyset) = v(\{1\}, \{2, 3\}) = v(\{2, 3\}, \emptyset) = 16$

## Bi-kooperativní hra

Bi-kooperativní hra $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon \mathcal{Q}(N) \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $v(\emptyset, \emptyset) = 0$.

## Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota bi-kooperativních her $\phi^{\mathcal{Q}}$ je pro bi-kooperativní hru $(N, v)$ definována jako

$$\phi_i^{\mathcal{Q}} := \phi_i^+ + \phi_i^-,$$

kde

- $\phi_i^+ := \sum_{(S,T) \subseteq \mathcal{Q}(N \setminus i)} \alpha_{(S,T)} \left[v(S \cup i, T) - v(S, T)\right],$
- $\phi_i^- := \sum_{(S,T) \subseteq \mathcal{Q}(N \setminus i)} \beta_{(S,T)} \left[v(S, T \cup i) - v(S, T)\right].$

- Cíl: Rozdělení *zdrojů* hráče mezi několik koalic
  - čas, peníze, suroviny, ...

**Hra s překrývajícími se koalicemi**

Kooperativní hra s překrývajícími se koalicemi $(N, v)$ je dvojice, kde $N$ je množina hráčů a $v\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ je charakteristická funkce. Platí, že $v(0^n) = 0$.

- definice konceptů řešení nejsou standardizované
- hodně těžkopádný model...

## Shrnutí

Existuje celá řada modelů zobecňujících základní model kooperativních her. Modely se různí podle využití. Zaměřené mohou být na koaliční struktury, neurčitost v datech, snaha o kompaktní reprezentaci dat, či modelování složitějších situací.