Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

July 11, 2022

Konvexní hry

Konvexní hra

Kooperativní hra (N, v) je **konvexní**, pokud

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

pro všechny $S, T \subseteq N$.

- Cíl: *Pochopit, o jaké hry se jedná*

Zesílení superaditivní hry a tendence k větší koalici

Konvexní hra:

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$
  - $S, T \subseteq N$
- $S \cap T = \emptyset$
  - $v(S \cap T) = 0$
- $v(S) + v(T) \leq 0 + v(S \cup T)$

Zesílení superaditivní hry a tendence k větší koalici

Konvexní hra:

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$
  - $S, T \subseteq N$
- $S \cap T = \emptyset$
  - $v(S \cap T) = 0$
- $v(S) + v(T) \leq 0 + v(S \cup T)$

Konvexní hry jsou superaditivní

Každá konvexní hra je superaditivní.

Větší koalice mají větší marginální přínos...

Charakterizace kooperativních her

Kooperativní hra (N, v) je konvexní právě tehdy, když

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$$

pro $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$.

Důkaz: $\Longrightarrow$

- $v(A) + v(B) \leq v(A \cap B) + v(A \cup B)$
  - $A = S \cup i$
  - $B = T$
- $v(S \cup i) + v(T) \leq v((S \cup i) \cap T) + v((S \cup i) \cup T)$
  - $(S \cup i) \cap T = S$
  - $(S \cup i) \cup T = T \cup i$
- $v(S \cup i) + v(T) \leq v(S) + v(T \cup i)$

Větší koalice mají větší marginální přínos...

Charakterizace kooperativních her

Kooperativní hra (N, v) je konvexní právě tehdy, když

$$v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$$

pro $S \subseteq T \subseteq N \setminus i$.

Důkaz: $\Longleftarrow$

- Sečteme následující:
  - $A \setminus B = \{i_1, \ldots, i_k\}$
  - $v((A \cap B) \cup i_1) - v(A \cap B) \leq v(B \cup i_1) - v(B)$
  - $v((A \cap B) \cup i_1 \cup i_2) - v((A \cap B) \cup i_1) \leq v(B \cup i_1 \cup i_2) - v(B \cup i_1)$
  - $\vdots$
  - $v(A) - v(A \setminus i_k) \leq v(B \cup A) - v((B \cup A) \setminus i_k)$

- Pro obecnou (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$
- Ukážeme si, že pro konvexní hry platí rovnost

Jádro se rovná Weberově množině

Pro konvexní kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) = \mathcal{W}(v)$.

Důkaz: Ukážeme, že $m_v^{id} \in \mathcal{C}(v)$

1. $m_v^{id}(N) = \sum_{i \in N} v(\{1, \dots, i\}) - v(\{1, \dots, i-1\}) = v(N)$
2. $m_v^{id}(S) \geq v(S)$
   - $S = \{s_1, s_2, \dots, s_s\}$
     - $s_1 < s_2 < \dots < s_s$
   - $v(\{1, \dots, s_i\}) - v(\{1, \dots, s_{i-1}\}) \geq v(\{s_1, \dots, s_i\}) - v(\{s_1, \dots, s_{i-1}\})$
     - $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq \{1, \dots, s_s\}$ pro $k \leq s$
   - $m_v^{id}(S) = \sum_{s_i \in S} v(\{1, \dots, s_i\}) - v(\{1, \dots, s_{i-1}\})$
   - $m_v^{id}(S) \geq \sum_{s_i \in S} v(\{s_1, \dots, s_i\}) - v(\{s_1, \dots, s_{i-1}\}) = v(S)$

- Ukážeme si, že **pouze** pro konvexní hry platí rovnost

Rovnost implikuje konvexitu

Pokud pro kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) = \mathcal{W}(v)$, poté je (N, v) konvexní.

Důkaz:

- $N = \{\underbrace{i_1, \ldots, i_k}_{S \cap T}, \underbrace{i_{k+1}, \ldots, i_\ell}_{T \setminus S}, \underbrace{i_{\ell+1}, \ldots, i_o}_{S \setminus T}, \underbrace{i_{o+1}, \ldots, i_p}_{N \setminus (S \cup T)}\}$
- $\sigma(j) = i_j$
- $m_v^\sigma(S) \geq v(S)$
- $v(S) \leq \sum_{i \in S} (m_v^\sigma)_i = \sum_{j=1}^{k} (m_v^\sigma)_{i_j} + \sum_{j=\ell+1}^{o} (m_v^\sigma)_{i_j} =$
- $= v(i_1, \ldots, i_k) - v(i_1, \ldots, i_\ell) + v(i_1, \ldots, i_o) =$
- $= v(S \cap T) - v(T) + v(S \cup T)$

Shapleyho hodnota je těžiště jádra

- $\phi(v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \frac{m_v^\sigma}{n!}$
- Pro konvexní hru (N, v):
    1. $\phi(v) \in \mathcal{C}(v)$
    2. $\phi(v)$ je těžiště $\mathcal{C}(v)$

Prekernel a Kernel

- původně koncepty řešení aproximující *bargaining set*
- později zajímavé samy o sobě

Maximal surplus

Hráči si to umějí spočítat...

- $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$ ... **exces** koalice S vzhledem k x
  - využit při definici nukleolu
  - udává *míru nespokojenosti* S s x
  - *potenciál* ke generování více zisku
    - $\implies$ vyjednávací síla hráčů
- $s_{ij}(x, v) := \max_{S \subseteq N: i \in S, j \notin S} e(S, x, v)$ ... *(maximal surplus)*
  - vyjednávací síla hráče i vůči hráči j
  - potenciální zisk i, pokud nespolupracuje s j
- $s_{ij}(x, v) > s_{ji}(x, v)$
  - hráč i nepřijme x
  - má nárok na část výplaty x_j

Prekernel

Hráči si to umějí spočítat...

- $e(S, x, v) = v(S) - x(S)$ ... **exces** koalice S vzhledem k x
  - využit při definici nukleolu
  - udává *míru nespokojenosti* S s x
  - *potenciál* ke generování více zisku
    - $\implies$ vyjednávací sílu hráčů
- $s_{ij}(x, v) := \max_{S \subseteq N, i \in S, j \notin S} e(S, x, v)$ ... *(maximal surplus)*
  - vyjednávací síla hráče i vůči hráči j
  - potenciální zisk i, pokud nespolupracuje s j
- $s_{ij}(x, v) > s_{ji}(x, v)$
  - hráč i nepřijme x
  - má nárok na část výplaty x_j

Prekernel

Prekernel $\mathcal{K}^*$ kooperativní hry (N, v) je definován jako

$$\mathcal{K}^*(v) := \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid s_{ij} = s_{ji} \text{ pro } \forall i \neq j\}.$$

Prekernel

Prekernel $\mathcal{K}^*$ kooperativní hry (N, v) je definován jako

$$\mathcal{K}^*(v) := \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid s_{ij} = s_{ji} \text{ pro } \forall i \neq j\}.$$

Nevýhoda prekernelu:

- neplatí individuální racionalita
  - $x_i < v(i)$
  - **hráč *i* může za spolupráci platit ostatním!**

Kernel

Prekernel

Prekernel $\mathcal{K}^*$ kooperativní hry (N, v) je definován jako

$$\mathcal{K}^*(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid s_{ij} = s_{ji} \text{ pro } \forall i \neq j\}.$$

Nevýhoda prekernelu:

- neplatí individuální racionalita
  - $x_i < v(i)$
  - **hráč *i* může za spolupráci platit ostatním!**

Kernel

Kernel $\mathcal{K}$ kooperativní hry (N, v) je definován jako

$$\mathcal{K}(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid s_{ij} \geq s_{ji} \text{ nebo } x_i = v(i) \text{ pro } \forall i \neq j\}.$$

Kernel

Kernel $\mathcal{K}$ kooperativní hry (N, v) je definován jako

$$\mathcal{K}(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid s_{ij} \geq s_{ji} \text{ nebo } x_i = v(i) \text{ pro } \forall i \neq j\}.$$

1. $s_{ij} = s_{ji}$
   - stejné vyjednávací podmínky
2. $s_{ij} < s_{ji}$
   - hráč i v horší vyjednávací situaci
   - $\implies x_i = v(i)$
     - imunní, protože tuto hodnotu může získat sám

(Pre-)kernel konvexních her

- obecně $\mathcal{K}^*(v) \neq \mathcal{K}(v)$
- oba vícebodové
- pro konvexní hry překvapivé výsledky!

- obecně $\mathcal{K}^*(v) \neq \mathcal{K}(v)$
- oba vícebodové
- pro konvexní hry překvapivé výsledky!

(Pre-)kernel konvexních her

Pro prekernel $\mathcal{K}^*(v)$, kernel $\mathcal{K}(v)$ a nukleolus $\mathcal{N}(v)$ konvexní kooperativní hry (N, v) platí, že

$$\mathcal{K}^*(v) = \mathcal{K}(v) = \eta(v).$$

Důkaz: Shapley (1972) - příliš dlouhé

Shrnutí

Konvexní kooperativní hry (N, v) jsou charakterizovány několika způsoby:

1. $v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$ $(S, T \subseteq N)$,
2. $v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T)$ $(S \subseteq T \subseteq N \setminus i)$,
3. $\mathcal{C}(v) = \mathcal{W}(v)$.

Pro jejich koncepty řešení platí řada pěkných vlastností, například $\mathcal{K}^*(v) = \mathcal{K}(v) = \mathcal{N}(v)$.