Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/~cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

March 30, 2022

Shapleyho hodnota a Weberova množina

- $x \in \mathcal{C}(v)$ mohou být *nespravedlivé*
  - $v(S) = \min\{|S_\ell|, |S_p|\}$
    - S_ℓ ... počet hráčů v S s levou botou
    - S_p ... počet hráčů v S s pravou botou
    - $|N| = 201$, $|N_\ell| = 100$, $|N_p| = 101$
    - $v(201) = 100 \cdot 1000$
    - $C(v) = \{x\}$
    - $x_i = \begin{cases} 1000 \text{ kč} & \text{pokud } i \in N_\ell, \\ 0 \text{ kč} & \text{pokud } i \in N_p. \end{cases}$
- Chceme *spravedlivé* řešení $\implies$ Shapleyho hodnota

Spravedlivé rozdělení

- Pokud je $f(v): \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ jednobodový koncept řešení splňující

1. (AXIOM EFICIENCE)
   - $\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$
   - *Veškerý zisk se rozdělí mezi všechny hráče.*
2. (AXIOM SYMETRIE)
   - $\forall i, j \in N, S \subseteq N \setminus \{i, j\} : v(S \cup i) = v(S \cup j) \implies f_i(v) = f_j(v)$
   - *Stejná hodnota, stejná výplata.*
3. (AXIOM NULOVÉHO HRÁČE)
   - $\forall i \in N, \forall S \subseteq N : v(S) = v(S \cup i) \implies f_i(v) = 0$
   - *Bez práce nejsou koláče.*
4. (AXIOM ADITIVITY)
   - $\forall v, w \in \Gamma^n : f(v + w) = f(v) + f(w)$
   - *Rozdělení na jednodušší hry vede ke stejným výplatám.*

- poté je **určen jednoznačně!**

Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota $\phi\colon \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ je jednobodový koncept řešení splňující axiomy:
EFICIENCE, SYMETRIE, NULOVÉHO HRÁČE a ADITIVITY.

- Jak určit $\phi(v)$?
- **klíčové:** využijeme aditivity a vlastností Γ^n
  - Γ^n tvoří vektorový prostor

Vektorový prostor Γ^n

Dva pohledy na stejný objekt (N, v):

1. $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$
    - $v(\emptyset) = 0$
    - Γ^n ... množina kooperativních her
2. $v \in \mathbb{R}^{2^n}$
    - $v \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$
    - $(\mathbb{R}^{2^n-1}, +, \cdot)$ ... *vektorový prostor kooperativních her*

Vektorový prostor Γ^n

Dva pohledy na stejný objekt (N, v):

1. $v : 2^N \to \mathbb{R}$
   - $v(\emptyset) = 0$
   - Γ^n ... množina kooperativních her
2. $v \in \mathbb{R}^{2^n}$
   - $v \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$
   - $(\mathbb{R}^{2^n-1}, +, \cdot)$ ... *vektorový prostor kooperativních her*

Vektorový prostor Γ^n

Množina všech kooperativní her Γ^n tvoří vektorový prostor isomorfní standardnímu vektorovému prostoru dimenze $2^n - 1$.

Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota $\phi\colon \Gamma^n \to \mathbb{R}^n$ je jednobodový koncept řešení splňující axiomy:
EFICIENCE, SYMETRIE, NULOVÉHO HRÁČE a ADITIVITY.

- Jak určit $\phi(v)$?
- **klíčové:** využijeme aditivity a vlastností Γ^n
  - Γ^n tvoří vektorový prostor
- $v = \sum_{S \subseteq N} \alpha_S b_S$
  - (N, b_S) ... bázická hra
- $\phi(v) = \phi(\sum_{S \subseteq N} \alpha_S b_S) = \sum_{S \subseteq N} \phi(\alpha_S b_S)$
  - druhá rovnost z aditivity

1. Určíme $\phi(\alpha_S b_S)$
2. sečteme přes $\sum_{S \subseteq N}$

- **Zásadní otázka:** Jakou zvolit bázi Γ^n?

Kanonická báze (N, e_S) pro $S \subseteq N$:

- $e_S(T) = \begin{cases} 1 & T = S, \\ 0 & T \neq S. \end{cases}$
- $v = \sum_{S \subseteq N} v(S) e_S$

Volba báze prostoru her

Kanonická báze (N, e_S) pro $S \subseteq N$:

- $e_S(T) = \begin{cases} 1 & T = S, \\ 0 & T \neq S. \end{cases}$
- $v = \sum_{S \subseteq N} v(S) e_S$

Proč není kanonická báze vhodná?

- $\phi(v) = \sum_{S \subseteq N} \phi(v(S) e_S)$

1. $e_S(N) = 0$ pokud $S \neq N$
2. $\phi_i(e_S) = \begin{cases} \frac{(s-1)!(n-s-2)!}{n!} & i \in S, \\ \frac{s!(n-s-1)!}{n!} & i \notin S. \end{cases}$
    - složitý výpočet

- Shapleyho hodnota ϕ splňuje *CARRIER AXIOM*
  - $S \subseteq N : v(T) = v(S \cap T), T \subseteq N$ ... **carrier** hry (N, v)

Shapleyho hodnota splňuje CARRIER AXIOM

Pokud je $S \subseteq N$ carrier kooperativní hry (N, v), poté platí, že $\sum_{i \in S} \phi_i(v) = v(N)$.

Důkaz:

- $T = T_S \cup T_{\overline{S}}$
  - $T_S = T \cap S$ ... průnik T s S
  - $T_{\overline{S}} = T \setminus T_S$ ... doplněk T_S v T
- $v(T) = v(T_S)$
  - $v(T) = v(T_S \cup T_{\overline{S}}) = v(T_S)$
- $i \notin S$: $v(T \cup i) = v((T_S \cup T_{\overline{S}}) \cup i) = v(T_S) = v(T_S \cup T_{\overline{S}}) = v(T)$
  - $\implies$ i je nulový hráč
  - $\implies \phi_i(v) = 0$
- $v(N) = \sum_{i \in N} \phi_i(v) = \sum_{i \in S} \phi_i(v) + \sum_{i \notin S} \phi_i(v) = \sum_{i \in S} \phi_i(v)$

Carrier je vítězná koalice...

Báze z **jednohlasných her** (N, u_S) pro $S \subseteq N$:

- $u_S(T) = \begin{cases} 1 & S \subseteq T, \\ 0 & S \not\subseteq T. \end{cases}$
- $v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} d_v(S) u_S$
  - $d_v(S)$ ... Harsanyiho dividendy
  - $v(S) = \sum_{T \subseteq S} d_v(T)$
- $d_v(i) = v(i)$
  - $v(i) = d_v(i)$
- $d_v(\{i,j\}) = v(\{i,j\}) - v(i) - v(j)$
  - $v(\{i,j\}) = d_v(i) + d_v(j) + d_v(\{i,j\}) = v(i) + v(j) + d_v(\{i,j\})$
- $d_v(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)$
  - Iterace postupu + princip inkluze a exkluze

Shapleyho hodnota jednohlasných her

Pro $(N, \alpha u_S)$, kde $S \subseteq N$ platí, že

$$\phi_i(\alpha u_S) = \begin{cases} \frac{\alpha}{|S|} & i \in S, \\ 0 & i \notin S. \end{cases}$$

Důkaz:

- $i \notin S$, $T \subseteq N \setminus \{i\}$
- $\alpha u_S(T \cup i) = \alpha u_S(T)$
  - $\alpha u_S(T) = \begin{cases} \alpha & \text{pokud } S \subseteq T \\ 0 & S \not\subseteq T \end{cases}$
  - $\alpha u_S(T \cup i) = \begin{cases} \alpha & \text{pokud } S \subseteq T \\ 0 & S \not\subseteq T \end{cases}$
- $\implies \phi_i(\alpha u_S) = 0$
- $\implies \sum_{k \in N} \phi_k(\alpha u_S) = \sum_{k \in S} \phi_k(\alpha u_S)$

Shapleyho hodnota jednohlasných her

Pro $(N, \alpha u_S)$, kde $S \subseteq N$ platí, že

$$\phi_i(\alpha u_S) = \begin{cases} \frac{\alpha}{|S|} & i \in S, \\ 0 & i \notin S. \end{cases}$$

Důkaz:

- $i, j \in S$, $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$
- $\alpha u_S(T \cup i) = \alpha u_S(T \cup j)$
  - $S \not\subseteq T \cup i$, $S \not\subseteq T \cup j$
  - $\alpha u_S(T \cup i) = 0 = \alpha u_S(T \cup j)$
- $\implies \phi_i(\alpha u_S) = \phi_j(\alpha u_S)$
- $\implies \sum_{k \in S} \phi_k(\alpha u_S) = |S| \cdot \phi_i(\alpha u_S)$
- $\alpha = \sum_{k \in N} \phi_k(\alpha u_S) = \sum_{k \in S} \phi_k(\alpha u_S) = |S| \cdot \phi_i(\alpha u_S)$

- $\phi_i(v) = \phi_i(\sum_{S \subseteq N, i \in S} d_v(S) u_S) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \phi_i(d_v(S) u_S) =$
  - z additivita
- $= \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{d_v(S)}{|S|} =$
  - předchozí tvrzení
- $= \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{1}{|S|} \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$
  - z definice $d_v(S)$
- Dá se odvodit: $\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S \cup i) - v(S)$
  - kdo přijde s elegantním důkazem, přihlédnu u zkoušky
    - Lloyd Shapley: *Snadné úpravy!*

Shapleyho hodnota

Pro (N, v) je Shapleyho hodnota $\phi(v)$ určena jako

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S \cup i) - v(S)$$

- Hráči provedou následující dohodu:
  1. *Budeme spolupracovat všichni.*
  2. *Do koalice budeme vstupovat postupně a nahodile.*
  3. *Při vstupu hráče i do koalice S vzniká nárok $v(S \cup i) - v(S)$.*
  - Je třeba hrát eficientě $\implies$ $v(N)$
  - na $v(S \cup i) - v(S)$ má hráč nárok pouze pokud vstupuje do S
    - S jakou pravděpodobností toto nastane?
    - $\implies$ střední hodnota nároku hráče

Shapleyho hodnota

Pro (N, v) je Shapleyho hodnota $\phi(v)$ určena jako

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} v(S \cup i) - v(S)$$

- Hráči provedou následující dohodu:
  1. *Budeme spolupracovat všichni.*
  2. *Do koalice budeme vstupovat postupně a nahodile.*
  3. *Při vstupu hráče i do koalice S vzniká nárok* $v(S \cup i) - v(S)$.
- $s!(n-s-1)!$ ... počet situací, kdy i vstupuje do S
- $n!$ ... počet všech vzniků koalic
- $\phi_i(v)$ **... střední hodnota nároku hráče** i

Weberova množina

1. Zafixujeme konkrétní konstrukci N
   - $\sigma \in \Sigma_n$ ... pomocí permutace
   - $\sigma(i)$ ... pořadí, v jakém i vstoupí do N
2. spočteme nároky hráčů
   - m_v^σ ... marginální vektor
   - $(m_v^\sigma)_i := v(S_{\sigma(i)} \cup i) - v(S_{\sigma(i)})$
     - $S_{\sigma(i)} := \{j \in N \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$ ... předchůdci i při σ
3. Uvážíme všechny kombinace
   - $\mathcal{W}(v) := conv\{m_v^\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ ... **Weberova množina**

- Platí: $\phi(v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \frac{m_v^\sigma}{n!}$

Weberova množina

- Zafixujeme konkrétní konstrukci N
  - $\sigma \in \Sigma_n$ ... pomocí permutace
  - $\sigma(i)$ ... pořadí, v jakém i vstoupí do N
- spočteme nároky hráčů
  - m_v^σ ... marginální vektor
  - $(m_v^\sigma)_i := v(S_{\sigma(i)} \cup i) - v(S_{\sigma(i)})$
    - $S_{\sigma(i)} := \{j \in N \mid \sigma(j) < \sigma(i)\}$ ... předchůdci i při σ
- Uvážíme všechny kombinace
  - $\mathcal{W}(v) := conv\{m_v^\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ ... **Weberova množina**
- Platí: $\phi(v) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \frac{m_v^\sigma}{n!}$

Vztah Shapleyho hodnoty a Weberovy množiny

Pro libovolnou kooperativní hru (N, v) platí, že

$$\phi(v) \in \mathcal{W}(v).$$

Navíc $\phi(v)$ je těžiště $\mathcal{W}(v)$.

Weberova množina obsahuje jádro

Pro každou kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$.

Důkaz: Indukcí podle $|N|$

- $|N| = 1$
  - $|\Sigma_1| = 1$
  - $\mathcal{W}(v) = \{m_v^{id}\}$
    - $m_v^{id} = v(1)$

  1. $\mathcal{C}(v) = \emptyset$
     - $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$
  2. $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$
     - $x(1) = v(1)$
     - $\mathcal{C}(v) = \{v(1)\}$
     - $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$

Weberova množina obsahuje jádro

Pro každou kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$.

Důkaz: Indukcí podle $|N|$

- ukážeme pro $x \in \mathcal{C}(v)$ na hranici $\mathcal{C}(v)$
  - $\mathcal{C}(v)$ je konvexní
- $\exists S \subseteq N : x(S) = v(S)$
  1. (S, v_S)
     - $v_S(T) = v(T)$ pro $T \subseteq S$
  2. $(N \setminus S, w_S)$
     - $w_S(T) := v(S \cup T) - v(S)$ pro $T \subseteq N \setminus S$
  1. $x^S \in \mathcal{C}(v_S)$
     - $x(T) \geq v(T) = v_S(T)$ pro $T \subseteq S$
  2. $x^{N \setminus S} \in \mathcal{C}(w_S)$
     - $x(T) = x(T \cup S) - x(S) \geq v(T \cup S) - v(S) = w_S(T)$

Weberova množina obsahuje jádro

Pro každou kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{W}(v)$.

Důkaz: Indukcí podle n

- ukážeme pro $x \in \mathcal{C}(v)$ na hranici $\mathcal{C}(v)$
  - $\mathcal{C}(v)$ je konvexní $\implies$ platí pro všechny
- $\exists S \subseteq N : x(S) = v(S)$
  1. $x^S \in \mathcal{C}(v_S) \subseteq \mathcal{W}(v_S)$
     - $x^S = \sum_{\sigma \in \Sigma_s} \alpha_\sigma m^\sigma_{v_S}$ ... konvexní kombinace vrcholů $\mathcal{W}(v_S)$
  2. $x^{N \setminus S} \in \mathcal{C}(w_S) \subseteq \mathcal{W}(w_S)$
     - $x^{N \setminus S} = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-s}} \beta_\tau m^\tau_{w_S}$ ... konvexní kombinace vrcholů $\mathcal{W}(w_S)$
- $(\sigma, \tau) \in \Sigma_n$
  - $(\sigma, \tau)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \in S \\ |S| + \tau(i) & i \in N \setminus S \end{cases}$
- $x = \sum_{(\sigma,\tau) \in \Sigma_n} \alpha_\sigma \beta_\tau m_v^{(\sigma,\tau)} \in \mathcal{W}(v)$

Shrnutí

Shapleyho hodnota je jednobodový koncept řešení splňující vlastnosti, které z ní dělají spravedlivé rozdělní zisku. Dá se na ni nahlížet jak axiomaticky, tak explicitně vzorcem. Jako jedno její vícebodové zobecnění může sloužit Weberova množina, pro niž je Shapleyho hodnota jejím těžištěm.