Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

March 18, 2022

Nukleolus

Motivace

- $\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}(v) \mid x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N\}$ ... jádro hry
- Jak zvolit $x \in \mathcal{C}(v)$?

- $x(S) \geq v(S)$
- $x(S) + e = v(S)$
  - $e \leq 0$
  - velikost e udává *nespokojenost* hráčů s x
- $e(S, x) := v(S) - x(S)$ ... **exces koalice** S **vzhledem k** x
  - $\min e(S, x) \implies \max x(S)$
- $\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}(v) \mid e(S, x) \leq 0\}$

EXCES

- $e(S, x) := v(S) - x(S)$ ... **exces koalice** S **vzhledem k** x
- $\theta(x) = (e(S_1, x), e(S_2, x), \ldots, e(S_{2^n-1}, x))$ ... vektor excesů
  - $e(S_i, x) \geq e(S_j, x)$ pro $i \leq j$
- $\theta(x) \preceq_{lex} \theta(y)$ ... lexikografické uspořádání
  1. existuje k: $e(S_k, x) < e(S_k, y)$
  2. pro $\ell < k$: $e(S_\ell, x) = e(S_\ell, y)$

Nukleolus

- $e(S, x) := v(S) - x(S)$ ... **exces koalice** S **vzhledem k** x
- $\theta(x) = (e(S_1, x), e(S_2, x), \ldots, e(S_{2^n-1}, x))$ ... vektor excesů
  - $e(S_i, x) \geq e(S_j, x)$ pro $i \leq j$
- $\theta(x) \preceq_{lex} \theta(y)$ ... lexikografické uspořádání

Nukleolus

Pro kooperativní hru (N, v) je **nukleolus** $\eta(v)$

$$\eta(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid \theta(y) \succeq_{lex} \theta(x) \text{ pro } y \in \mathcal{I}(v)\}.$$

Nukleolus

Pro kooperativní hru (N, v) je **nukleolus** $\eta(v)$

$$\eta(v) := \{x \in \mathcal{I}(v) \mid \theta(y) \succeq_{lex} \theta(x) \text{ pro } y \in \mathcal{I}(v)\}.$$

- $\min\limits_{x \in \mathcal{I}(v)} \max\limits_{S \subseteq N} e(S, x)$
  - nejprve maximální
  - poté druhý největší
  - ...

Neprázdnost nukleolu

Pro libovolnou kooperativní hru (N, v) platí, že

$$\mathcal{I}(v) \neq \emptyset \implies \eta(v) \neq \emptyset.$$

Neprázdnost nukleolu

Pro libovolnou kooperativní hru (N, v) platí, že
$$\mathcal{I}(v) \neq \emptyset \implies \eta(v) \neq \emptyset.$$

Důkaz: Iterativní použití Weiersstrasovy věty o nabývání extrémů:

Weierstrassova věta

Spojitá funkce na kompaktní množině $\mathcal{M}$ nabývá svého minima. Navíc, množina všech minim tvoří kompaktní podmnožinu $\mathcal{M}$.

- $e(S, \bullet,)$ je spojitá pro $S \subseteq N \implies \theta_t(\bullet)$ je spojitá
- $X_0 := \mathcal{I}(v)$
- $X_t := \{x \in X_{t-1} \mid \theta_t(y) \geq \theta_t(x) \text{ pro } y \in X_{t-1}\}$
  - $t = 1, \ldots 2^n - 1$

Jednoznačnost nukleolu

Nukleolus je jednobodový koncept řešení.

Důkaz: "$\theta(x) = \theta(y) \implies x = y$"

- $0 \leq \alpha \leq 1$
- $x, y \in \eta(v) \implies \theta(x) = \theta(y)$

1. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \succeq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
2. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
3. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \theta(x) = \theta(y)$
4. $x = y$

Jednoznačnost nukleolu

Nukleolus je jednobodový koncept řešení.

Důkaz: "$\theta(x) = \theta(y) \implies x = y$"

- $0 \leq \alpha \leq 1$
- $x, y \in \eta(v) \implies \theta(x) = \theta(y)$

1. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \succeq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
   - z definice $\eta(v)$ a $x, y \in \eta(v)$
2. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
3. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \theta(x) = \theta(y)$
4. $x = y$

Jednoznačnost nukleolu

Nukleolus je jednobodový koncept řešení.

Důkaz: "$\theta(x) = \theta(y) \implies x = y$"

- $0 < \alpha < 1$
- $x, y \in \eta(v) \implies \theta(x) = \theta(y)$

1. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \succeq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
2. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
   - $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \preceq_{lex} \alpha\theta(x) + (1-\alpha)\theta(y)$
   - domácí cvičení
3. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \theta(x) = \theta(y)$
4. $x = y$

Jednoznačnost nukleolu

Nukleolus je jednobodový koncept řešení.

Důkaz: "$\theta(x) = \theta(y) \implies x = y$"

- $0 < \alpha < 1$
- $x, y \in \eta(v) \implies \theta(x) = \theta(y)$

1. $\theta(\alpha x + (1 - \alpha)y) \succeq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
2. $\theta(\alpha x + (1 - \alpha)y) \preceq_{lex} \theta(x) = \theta(y)$
3. $\theta(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \theta(x) = \theta(y)$
   - $\succeq_{lex}$ je antisymetrické uspořádání
4. $x = y$

Jednoznačnost nukleolu

Nukleolus je jednobodový koncept řešení.

Důkaz: "$\theta(x) = \theta(y) \implies x = y$"

- $0 < \alpha < 1$
- $x, y \in \eta(v) \implies \theta(x) = \theta(y)$

1. $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \theta(x) = \theta(y)$
2. $x = y$
   - $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha a + (1-\alpha)b$
     - $S_1, S_2, \ldots, S_{2^n-1}$ ... pořadí koalic v $\theta(\alpha x + (1-\alpha)y)$
     - $a = (e(S_1, x), e(S_2, x), \ldots, e(S_{2^n-1}, x))$
     - $b = (e(S_1, y), e(S_2, y), \ldots, e(S_{2^n-1}, y))$
   - $\theta(x) = a$, $\theta(y) = b$
     - $\alpha = 1$, $\alpha = 0$
   - $e(S_i, x) = e(S_i, y)$ pro $i = 1, \ldots, 2^n - 1$
     - $e(\{i\}, x) = e(\{i\}, y)$
     - $v(i) - x_i = v(i) - y_i$
     - $x_i = y_i$

Nukleolus je součástí jádra

Nukleolus je souřástí jádra

Pokud pro kooperativní hru (N, v) platí, že $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$, potom $\eta(v) \subseteq \mathcal{C}(v)$.

Důkaz: *Kdyby nebyl v jádru, není lexikograficky minimální*

- $x \in \eta(v) \setminus \mathcal{C}(v) \implies \exists S \subseteq N : e(S, x) > 0$
- pro $y \in \mathcal{C}(v) : e(S, y) \leq 0$
- $\theta(x) \succ_{lex} \theta(y)$
  - $\theta_1(x) > \theta_1(y)$

- Využijeme důkazu věty o neprázdnosti nukleolu
  - $X_0 := \mathcal{I}(v)$
  - $X_t := \{x \in X_{t-1} \mid \theta_t(y) \geq \theta_t(x) \text{ pro } y \in X_{t-1}\}$
    - $t = 1, \dots 2^n - 1$
- $$LP(0) = \begin{cases} \min_{x \in X_0, \alpha_0 \in \mathbb{R}} & \alpha_0 \\ \text{za podm.} & \alpha_0 \geq x(S) - v(S) \\ & \forall \emptyset \neq S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \end{cases}$$
  - X_1 ... množina optimálních řešení $LP(0)$
  - $\mathcal{B}_1 = \{S \subseteq 2^N \setminus \{\emptyset\} \mid e(S, x) = \alpha_0 \text{ pro } \forall x \in X_1\}$
- $$LP(t) = \begin{cases} \min_{x \in X_{t_1}, \alpha_t \in \mathbb{R}} & \alpha_t \\ \text{za podm.} & \alpha_t \geq x(S) - v(S) \\ & \forall \emptyset \neq S \in 2^N \setminus \mathcal{B}_t \end{cases}$$
  - X_t ... množina optimálních řešení $LP(t)$
  - $\mathcal{B}_{t+1} = \{S \in 2^n \setminus (\mathcal{B}_t \cup \{\emptyset\}) \mid e(S, x) = \alpha_t \text{ pro } \forall x \in X_t\} \cup \mathcal{B}_t$

Výpočet nukleolu

- $LP(0), LP(1), \ldots, LP(2^n - 2)$
  - Z důkazu věty o neprázdnosti: $X_t \neq \emptyset$
  - nejvýše $2^n - 1$ programů
    - pokud X_t obsahuje jediný vektor $\implies$ jedná se o nukleolus
- pro speciální třídy her efektivnější algoritmy
  - velké úsilý o efektivní výpočet nukleolu

Nukleolus

Nukleolus je jednobodový koncept řešení, který existuje pro každou kooperativní hru s **neprázdnou množinou imputací**. Navíc, pokud má tato hra neprázdné jádro, poté je nukleolus jeho součástí. Obecně je možné nukleolus vypočítat pomocí systému nejvíce $2^n - 1$ lineárních programů. Z toho důvodu je jedním z hlavních otevřených problémů kooperativní teorie her nalezení efektivnějších algoritmů pro speciální třídy kooperativních her.