Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

May 13, 2022

Jádro

Kooperativní hra

Kooperativní hra (N, v) je dvojice, kde N je množina hráčů a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* kooperativní hry. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

- Γ^n ... množina kooperativních her n hráčů
- $S \subseteq N$ ... koalice
- $v(S)$ ... hodnota koalice
  - **Výplatní vektor x** $\in \mathbb{R}^n$
    - x_i reprezentuje výplatu hráče i
    - $x(S) := \sum_{i \in S} x(S)$
  - Vektor **x** $\in \mathbb{R}^n$ je **eficientní**, pokud $x(N) = v(N)$
    - Obvykle rozdělujeme $v(N)$
  - Vektor **x** $\in \mathbb{R}^n$ je **individuálně racionální**, pokud $x_i \geq v(i)$
    - pro hráče má smysl uvažovat oproti $v(i)$
  - $\mathcal{I}^*(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N)\}$ ... **preimputace**
  - $\mathcal{I}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid \forall i \in N : x_i \geq v(i)\}$ ... **imputace**

Dnešní cíl: Jádro

Idea: *Rozdělení zisku vedoucí ke spolupráci...*

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\} .$$

- $v(N)$ ... hodnota, kterou chceme rozdělit
- $x(S) > v(S) \implies$ koalice S se neodtrhne od N
  - předpoklad: *homo economicus (člověk ekonocmický)*
  - odtržení vede na podhru (S, v_S)
  - $v(S)$ ... rozdělovaná hodnota

Dnešní cíl: Jádro

Idea: *Rozdělení zisku vedoucí ke spolupráci...*

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

- $v(N)$ ... hodnota, kterou chceme rozdělit
- $x(S) > v(S) \implies$ koalice S se neodtrhne od N
  - předpoklad: *homo economicus (člověk ekonocmický)*
  - odtržení vede na podhru (S, v_S)
  - $v(S)$ ... rozdělovaná hodnota

Cíl: *Analyzovat jádro kooperativních her*

Idea: Odklonění od aktuální strategie k nové nevede ke zlepšení.

Nashovo equilibrium

Profil strategií $(s_1, \dots, s_n)$ je **Nashovo equilibrium**, pokud pro každého hráče i platí, že

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

pro všechny $t_i \in S_i$.

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

- Nashovo equilibrium vždy existuje
- Platí totéž o $x \in \mathcal{C}(v)$?

- (N, v) hra, že $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$
- $x \in \mathcal{C}(v)$
  - $x(N) = v(N) < \sum_{i \in N} v(i) \leq x(N)$
    - $v(i) \leq x_i$
- x neexistuje

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\} .$$

- Nashovo equilibrium vždy existuje
- Platí totéž pro $\mathcal{C}(v)$?
- (N, v) hra, že $v(N) < \sum_{i \in N} v(i)$
  - **neesenciální hra**
- $x \in \mathcal{C}(v)$
  - $x(N) = v(N) < \sum_{i \in N} v(i) \leq x(N)$
    - $v(i) \leq x_i$
- x neexistuje

O neprázdnosti jádra

Existují kooperativní hry (N, v) s prázdným jádrem.

Příklady jádra: Společná produkce

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H,S\}$	$\{H,I\}$	$\{S,I\}$	$\{H,S,I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H,S,I\}$ ... společnosti
  - H ... hardware
  - S ... software
  - I ... IT support
- $v(\{H,S,I\})$ ... cena společného produktu
- *Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?*
  - *Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?*

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H,S\}$	$\{H,I\}$	$\{S,I\}$	$\{H,S,I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H, S, I\}$ ... společnosti
- *Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?*
  - *Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?*

Výplatní vektory z jádra $x \in \mathbb{R}^3$:

1. $x(N) = v(N)$
   - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
2. $x(T) \geq v(T), \forall T \subseteq N$
   - $x_1 \geq 5$
   - $x_2 \geq 2$
   - $x_3 \geq 1$
   - $x_1 + x_2 \geq 8$
   - $x_1 + x_3 \geq 4$
   - $x_2 + x_3 \geq 4$
   - $x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H, S\}$	$\{H, I\}$	$\{S, I\}$	$\{H, S, I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H, S, I\}$ ... společnosti
- Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?
  - Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?

Výplatní vektory z jádra $x \in \mathbb{R}^3$:

1. $x(N) = v(N)$
   - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
2. $x(T) \geq v(T), \forall T \subseteq N$
   - $x_1 \geq 5$
   - $x_2 \geq 2$
   - $x_3 \geq 1$
   - $x_1 + x_2 \geq 8$
   - $\cancel{x_1 + x_3 \geq 4}$
   - $x_2 + x_3 \geq 4$
   - $\cancel{x_1 + x_2 + x_3 \geq 10}$

Příklady jádra: Společná produkce

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H,S\}$	$\{H,I\}$	$\{S,I\}$	$\{H,S,I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H,S,I\}$ ... společnosti
- Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?
  - Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?

Výplatní vektory z jádra $x \in \mathbb{R}^3 : (5.\overline{6}, 2.\overline{6}, 1.\overline{6})$

- rovnoměrné rozdělení přebytku

1. $x(N) = v(N)$
   - $5.\overline{6} + 2.\overline{6} + 1.\overline{6} = 10$
2. $x(T) \geq v(T), \forall T \subseteq N$
   - $5.\overline{6} \geq 5$
   - $2.\overline{6} \geq 2$
   - $1.\overline{6} \geq 1$
   - $5.\overline{6} + 2.\overline{6} \geq 8$
   - $2.\overline{6} + 1.\overline{6} \geq 4$

Příklady jádra: Společná produkce

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H,S\}$	$\{H,I\}$	$\{S,I\}$	$\{H,S,I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H, S, I\}$ ... společnosti
- Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?
  - Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?

Výplatní vektory z jádra $x \in \mathbb{R}^3$: $(5, 4, 1)$

- preferování S

1. $x(N) = v(N)$
   - $5 + 4 + 1 = 10$
2. $x(T) \geq v(T), \forall T \subseteq N$
   - $5 \geq 5$
   - $4 \geq 2$
   - $1 \geq 1$
   - $5 + 4 \geq 8$
   - $4 + 1 \geq 4$

T	$\{H\}$	$\{S\}$	$\{I\}$	$\{H,S\}$	$\{H,I\}$	$\{S,I\}$	$\{H,S,I\}$
$v(T)$	5	2	1	8	4	4	10

- $\{H, S, I\}$ … společnosti
- Vyplatí se společnostem vytvořit společný produkt?
  - Jak rozdělit zisky, aby došlo k dohodě?

Výplatní vektory z jádra $x \in \mathbb{R}^3 : (5 + \alpha, 2 + \beta, 1 + \gamma)$

- obecně

1. $x(N) = v(N)$
   - $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
     - $\alpha + \beta + \gamma = 2$
     - $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$
2. $x(T) \geq v(T), \forall T \subseteq N$
   - $x_1 + x_2 \geq 8$
     - $\alpha + \beta \geq 1$
   - $x_2 + x_3 \geq 4$
     - $\alpha + \gamma \geq 1$

Bankovní loupež

- n zlodějů
- 2 unesou jeden pytel s penězi
- $v(S) = \begin{cases} \frac{|S|}{2} & \text{pokud } S \text{ je sudé,} \\ \frac{|S|-1}{2} & \text{pokud } S \text{ je liché.} \end{cases}$

Jak vypadá jádro $\mathcal{C}(v)$?

1. n je sudé
   - $\mathcal{C}(v) = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})^T\}$
2. n je liché
   - $\mathcal{C}(v) = \emptyset$

- později: *Shapleyho hodnota vede na rovnoměrné rozdělení zisku* $x_i = \frac{v(N)}{n}$

Nevýhody jádra: Citlivost na nevyváženost (2)

Prodej obuvy

- 201 hráčů
  - 100 levou botu
  - 101 pravou botu
- cena páru: 1000 kč
- $v(S) = \min\{S_\ell, S_p\} \cdot 1000$
  - S_ℓ ... počet hráčů v S s levou botou
  - S_p ... počet hráčů v S s pravou botou
  - $v(201) = 100 \cdot 1000$

Jak vypadá jádro $\mathcal{C}(v)$?

- $x \in \mathcal{C}(v)$:
  - $x_i = \begin{cases} 0 & i \in N_p \\ 1000 & i \in N_\ell \end{cases}$

Kdy je jádro neprázdné?

- $\mathcal{B} = \{(N, v) \in \Gamma^n \mid \mathcal{C}(v) \neq \emptyset\}$ ... hry s neprázdným jádrem
- *Kdy je jádro neprázdné?*
  - *využijeme dualitu LP*

  1. Zakódujeme jádro pomocí (P)
  2. Určíme (D)
  3. odvodíme slabý Bondareva-Shapley teorém z (D)

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{za podm.} & Ax \geq b \end{cases}$ $\quad (D) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}^m_+} & b^T y \\ \text{za podm.} & A^T y = c \end{cases}$
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$

1. Zakódujeme jádro jako (P)

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{za podm.} & Ax \geq b \end{cases}$
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$

Podmínky jádra:

1. $x(N) = v(N)$
   - vynutíme optimalitou
2. $x(S) \geq v(S)$ pro $S \subseteq N$
   - podmínky LP

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x(N) \\ & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
  - $x \in \mathcal{C}(v) \implies x(N) = v(N)$
  - $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset \iff \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} x(N) = v(N)$

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{za podm.} & Ax \geq b \end{cases}$ $\quad (D) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}^m_+} & b^T y \\ \text{za podm.} & A^T y = c \end{cases}$
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$

LP kódující jádro:

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x(N) \\ & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
  - $b \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$
    - $b_S = v(S)$
    - $b_\emptyset$ by nemělo smysl
  - $c = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$
    - $c^T x = \sum_{i \in N} c_i \cdot x_i = \sum_{\in N} x_i = \sum_{i \in N} 1 \cdot x_i$
  - $A \in \mathbb{R}^{(2^n - 1) \times n}$

- $(P) = \begin{cases} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & c^Tx \\ \text{za podm.} & Ax \geq b \end{cases}$ $(D) = \begin{cases} \max_{y\in\mathbb{R}^m_+} & b^Ty \\ \text{za podm.} & A^Ty = c \end{cases}$
  - $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$

LP kódující jádro:

- $(P) = \begin{cases} \min_{x\in\mathbb{R}^n} & x(N) \\ \text{za podm.} & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
- $(D) = \begin{cases} \max_{y\in\mathbb{R}^{(2^n-1)}_+} & \sum_{S\subseteq N} v(S)y_S \\ \text{za podm.} & \sum_{\emptyset\neq S\subseteq N}(\mathcal{X}_S)_i y_S = 1 \text{ pro } i \in N \end{cases}$
  - $\mathcal{X}^S$ ... charakteristický vektor S
    - $(\mathcal{X}_S)_i = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases}$

Duál k LP jádra

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x(N) \\ \text{za podm.} & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
- $(D) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}} & \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \\ \text{za podm.} & \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} y_S \mathcal{X}_S = \mathcal{X}_N \end{cases}$

Věta o vztahu (P) a (D)

Pokud je (P) a (D) přípustný, poté se optimum obou úloh nabývá a je si rovno.

- (P) je přípustný pro dostatečně velké $x \in \mathbb{R}^n$
- (D) je přípustný např. pro $y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}$, $y_S := \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & S \neq N \end{cases}$
- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x(N) = \max_{y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}} \sum_{S \subseteq N} y_S v(S)$

Duál k LP jádra

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x(N) \\ \text{za podm.} & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
- $(D) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}} & \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \\ \text{za podm.} & \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} y_S \mathcal{X}_S = \mathcal{X}_N \end{cases}$
- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x(N) = \max_{y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}} \sum_{S \subseteq N} y_S v(S)$

1. $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$
   - $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x(N) = v(N)$
   - $v(N) \geq \sum_{S \subseteq N} y_S v(S)$ pro všechny $y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}$
2. $\mathcal{C}(v) = \emptyset$
   - $v(N) < \sum_{S \subseteq N} y_S v(S)$ pro všechny $y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}$
   - $\min_{x \in \mathbb{R}^n} x(N) > v(N)$

Duál k LP jádra

- $(P) = \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & x(N) \\ \text{za podm.} & x(S) \geq v(S) \text{ pro } S \subseteq N \end{cases}$
- $(D) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}_+^{(2^n-1)}} & \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \\ \text{za podm.} & \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} y_S \mathcal{X}_S = \mathcal{X}_N \end{cases}$

O neprázdnosti jádra

Hra (N, v) má **neprázdné jádro** právě tehdy když

$$v(N) \geq \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \text{ pro všechny přípustné } y \in \mathbb{R}^{(2^n-1)}.$$

- Kolekce $\mathcal{B} \subseteq 2^N$ je **balancovaná**, pokud existují $\delta_S > 0$, že
  1. $\sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \mathcal{X}_S = \mathcal{X}_N$,
  - δ_S … **balancující váhy**

- Kolekce $\mathcal{B} \subseteq N$ je **balancovaná**, pokud existují $\delta_S > 0$, že
  1. $\sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \mathcal{X}_S = \mathcal{X}_N$,
  - δ_S ... **balancující váhy**

Slabý Bondareva-Shapley teorém

Hra (N, v) má **neprázdné jádro** právě tehdy když pro každou balancovanou kolekci $\mathcal{B}$ a každý její systém balancujících vah $(\delta_S)_{S \in \mathcal{B}}$ platí, že

$$v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S).$$

Důkaz:

- plyne z Věty o neprázdnosti jádra a definice $\mathcal{B}$
  - $y_S = \delta_S$

- $(N, \mathbb{R}_+^m, A, W)$ ... trh

Přípustná S-alokace (feasible S-allocation)

Přípustná S-alokace je $(a_S^i)_{i\in S}$ taková, že $\sum_{i\in S} a_S^i = \sum_{i\in S} a^i$. Množinu všech přípustných S-alokací značíme $\mathcal{A}_S$.

Tržní hra

Kooperativní hra (N, v) je **tržní hra**, pokud existuje trh $(N, \mathbb{R}_+^m, A, W)$, takový, že

$$v(S) = \max\{\sum_{i\in S} w^i(a_S^i) \mid (a_S^i)_{i\in S} \in \mathcal{A}_S\}.$$

Tržní hry mají neprázdné jádro

Každá tržní hra má neprázdné jádro.

Důkaz:

- ukážeme $v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S)$ pro $\mathcal{B}$ a δ_S, $S \in \mathcal{B}$
    1. definice $v(S)$ dává S-alokace $(a^i_S)_{i \in S}$ pro $\emptyset \neq S \subseteq N$
    2. sestrojíme N-alokaci $(y^i_N)_{i \in N}$ jako "$(y^i_N)_{i \in N} = \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S (a^i_S)_{i \in S}$"
    3. $v(N) \geq \sum_{i \in N} w^i(y^i_N)$
    4. pomocí konkavity W dostaneme vyžadovanou nerovnost

Tržní hry mají neprázdné jádro

Každá tržní hra má neprázdné jádro.

Důkaz:

- ukážeme $v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S)$ pro každé $\delta_S, S \in \mathcal{B}$
  1. definice $v(S)$ dává S-alokace $(a_S^i)_{i \in S}$ pro $\emptyset \neq S \subseteq N$
     - $v(S) = \max\{\sum_{i \in S} w^i(a_S^i) \mid (a_S^i)_{i \in S} \in \mathcal{A}_S\}$
     - zvolíme $(a_S^i)_{i \in S}$, že $v(S) = \sum_{i \in S} w^i(a_S^i)$

Tržní hry mají neprázdné jádro

Každá tržní hra má neprázdné jádro.

Důkaz:

1. definice $v(S)$ dává S-alokace $(a_S^i)_{i \in S}$ pro $\emptyset \neq S \subseteq N$
2. sestrojíme N-alokaci $(y_N^i)_{i \in N}$ jako "$(y_N^i)_{i \in N} = \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S A_S$"
   - $y_N^i := \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S a_S^i$
   - $(y_N^i)_{i \in N}$ je přípustná N-alokace ($\sum_{i \in N} y_N^i = \sum_{i \in N} a^i$)
     - $\sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S a_S^i = \sum_{S \in \mathcal{B}} \sum_{i \in S} \delta_S a_S^i =$
     - $= \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \sum_{i \in S} a_S^i = \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \sum_{i \in S} a^i =$
     - $= \sum_{i \in N} a^i \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S = \sum_{i \in N} a^i$

Tržní hry mají neprázdné jádro

Každá tržní hra má neprázdné jádro.

Důkaz:

- ukážeme $v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S)$ pro každé $\delta_S, S \in \mathcal{B}$
    1. definice $v(S)$ dává S-alokace $(a_S^i)_{i \in S}$ pro $\emptyset \neq S \subseteq N$
    2. sestrojíme N-alokaci $(y_N^i)_{i \in N}$ jako $y_N^i = \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S a_S^i$
    3. $v(N) \geq \sum_{i \in N} w^i(y_N^i)$
        - $(y_N^i)_{i \in N}$ je přípustná N-alokace
        - $v(N)$ je maximum sumy přes všechny N-alokace

Tržní hry mají neprázdné jádro

Každá tržní hra má neprázdné jádro.

Důkaz:

- ukážeme $v(N) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S)$ pro každé $\delta_S, S \in \mathcal{B}$
  1. definice $v(S)$ dává S-alokace $(a_S^i)_{i \in S}$ pro $\emptyset \neq S \subseteq N$
  2. sestrojíme N-alokaci $(y_N^i)_{i \in N}$ jako $y_N^i = \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S a_S^i$
  3. $v(N) \geq \sum_{i \in N} w^i(y_N^i)$
  4. pomocí konkavity W dostaneme vyžadovanou nerovnost
     - $w^i(y_N^i) \geq \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S w^i(a_S^i)$
     - $v(N) \geq \sum_{i \in N} w^i(y_N^i) \geq \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{B}, i \in S} \delta_S w^i(a_S^i) =$
     - $= \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S \sum_{i \in S} w^i(a_S^i) = \sum_{S \in \mathcal{B}} \delta_S v(S)$

Totálně balancované hry

- (N, v) je **balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$
- (N, v) je **totálně balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v_S) \neq \emptyset$ pro $S \subseteq N$
    - (S, v_S) podhra

- (N, v) je **balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v) \neq \emptyset$
- (N, v) je **totálně balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v_S) \neq \emptyset$ pro $S \subseteq N$
  - (S, v_S) podhra

TB tržních her

Tržní hry jsou totálně balancované.

Důkaz:

- (S, v_S) tvoří tržní hru
  - $\implies$ má neprázdné jádro (předchozí tvrzení)

Totálně balancované hry: opačná implikace

- (N, v) je **totálně balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v_S) \neq \emptyset$ pro $S \subseteq N$
    - (S, v_S) podhra

TB hry jsou tržní

Ke každé totálně balancované hře (N, v) existuje trh, jehož tržní hra je (N, v).

Důkaz: **Direktní trh** $(N, \mathbb{R}^n_+, I_n, W)$

- $I_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$
- $W = (w)_{i \in N}$ ... konkávní spojité homogenní funkce
  - $w(x) + w(y) \leq w(x + y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ ... superadditivní

Totálně balancované hry: opačná implikace

- (N, v) je **totálně balancovaná hra**
  - $\mathcal{C}(v_S) \neq \emptyset$ pro $S \subseteq N$
    - (S, v_S) podhra

TB hry jsou tržní

Ke každé totálně balancované hře (N, v) hře existuje trh, jehož tržní hra je (N, v).

Důkaz: **Direktní trh** $(N, \mathbb{R}^n_+, I_n, W)$

- (N, v) ... totálně balancovaná hra
- $w(x) := \begin{cases} \max & \sum_{S \subseteq N} \delta_S v(S) \\ \text{za podm.} & \sum_{S \subseteq N} \delta_S \mathcal{X}_S = x \text{ pro } S \subseteq N \\ & \delta_S \geq 0 \end{cases}$
  - analýza k rozmyšlení

Zobecnění jádra

- (N, v) ... nebalancovaná hra ($\mathcal{C}(v) = \emptyset$)
- *Chceme něco jádru podobného...*

1. **Silné ε-jádro** $\mathcal{C}_\varepsilon(v)$
   - *Zeslabení nerovností jádra*
   - $\mathcal{C}_\varepsilon(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S) - \varepsilon$ pro $S \subseteq N\}$
     - volíme ε minimální
2. **Core catchers**
   - *Nadmnožiny jádra, založené na odhadech výplatních vektorů*
   - a^v, b^v ... horní a dolní vektor
     - $b_i^v = v(N) - v(N \setminus i)$ ... maximální nárok
     - $a_i^v = \max_{S \subseteq N, i \in S} \{v(S) - b_k^v(S \setminus i)\}$ ... minimální nárok
   - $x \in \mathcal{C}(v) \implies a^v \leq x \leq b^v$
   - $\mathcal{CC}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid a^v \leq x \leq b^v\}$ ... **core catcher**
   - $\mathcal{H}(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^v \leq x \leq b^v\}$ ... **hypercube**

Struktura jádra

- $\mathcal{C}(v)$ je konvexní množina
  - dáno systémem rovnic a nerovnic
- $\mathcal{C}(v)$ je omezené
  - $\mathcal{C}(v) \subseteq \mathcal{I}(v)$
  - $\mathcal{I}(v) = \{x_\beta \in \mathbb{R}^n \mid \beta \in \mathbb{R}^n_+ \text{ a } \beta(N) = 1\}$
    - $(x_\beta)_i = v(i) + \beta_i \Delta$
    - $\Delta = v(N) - \sum_{i \in N} v(i)$
- struktura $\mathcal{C}(v)$ obecně těžko popsatelná
  - pro **konvexní hry** explicitní předpis
    - později během semestru
    - podobné výsledky pro *k-konvexní* a jiné...

Jádrové selekce (Core selections)

- Jak vybrat $x \in \mathcal{C}(v)$, pokud jich je více?
  1. *nucleolus*
     - příští přednáška
  2. *rovnostářské jádro (egalitarian core)*
     - možná později v rámci *fairness*
  3. ...

Jádro kooperativní hry

Jádro je vícebodový koncept řešení, který obsahuje *stabilní* výplatní vektory, tj. výplaty, které vedou na spolupráci všech hráčů. Pro obecné kooperativní hry nemusí takový výplatní vektor existovat. Hry s neprázdným jádrem se nazývají **balancované**. Hry, které mají neprázdné jádro pro každou podhru se nazývají **totálně balancované** a odpovídají jim **tržní hry**. Jádro je citlivé na *nevyváženost hodnot* hráčů.