Kooperativní teorie her

Martin Černý

kam.mff.cuni.cz/∼cerny
cerny@kam.mff.cuni.cz

June 30, 2022

Administrativní záležitosti

Přednášky

- Vyučující: Martin Černý, Martin Loebl
  - Úvod do modelu kooperativních her (6)
  - Koncepty férovosti (3-4)
  - Routing games (2)
  - Cena anarchie (2)

Cvičení

- **nekonají se!**

Materiály

- https://kam.mff.cuni.cz/~cerny/teach/21-22/coop.html

Zkoušení

- každý svou část zkoušky
  - možno již v půlce semestru

Dotazy?

NOPT060 Seminář z kooperativní teorie her

- aktuální témata z kooperativních her
  - *Částečně definované kooperativní hry*
- zaměření na bakalářské a magisterské studenty
  - možnost otestovat si, co obnáší výzkum
  - možnost navázat bakalářskou/magisterskou prací
- ST 10:40 SU1
  - po přednášce z Kooperativních her
- https://kam.mff.cuni.cz/~cerny/teach/21-22/coopsem.html

Motivace a úvod

Cíl: *Analýza a řešení konfliktních rozhodovacích situací*

Cíl: *Analýza a řešení konfliktních rozhodovacích situací*

Základní model: hra v **normální formě** $(N, \mathcal{S}, v)$:

- N ... množina n hráčů
- $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ ... profily strategií hráčů
  - S_i ... množina strategií i-tého hráče
- $v\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ ... užitková funkce
  - $v(S)_i$ ... užitek i-tého hráče při strategii S

Cíl: *Analýza a řešení konfliktních rozhodovacích situací*

Základní model: hra v **normální formě** $(N, \mathcal{S}, v)$:

- N ... množina n hráčů
- $\mathcal{S} = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ ... profily strategií hráčů
  - S_i ... množina strategií i-tého hráče
- $v\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ ... užitková funkce
  - $v(S)_i$ ... užitek i-tého hráče při strategii S

Základní otázka: *Jakou má hráč i zvolit strategii?*

Řešení her v normální formě? Nashovo equilibrium

Idea: Odklonění od aktuální strategie k nové nevede ke zlepšení.

Nashovo equilibrium

Profil strategií $(s_1, \ldots, s_n)$ je **Nashovo equilibrium**, pokud pro každého hráče i platí, že

$$v_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) \geq v_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

pro všechny $t_i \in S_i$.

- Je tento model vhodný pro studium kooperace?

Vězňovo dilema

Vězeň A \ Vězeň B	Mlčet	Mluvit
Mlčet	-1/-1	-3/0
Mluvit	0/-3	-2/-2

- Nashovo equilibrium nevede ke kooperaci
- Hlavní problém?
  - **Vězni se nemohou předem dohodnout na spolupráci**
- Řešení?
  1. Zalepit existující model
     - $\Longrightarrow$ Pareto optimum
     - $\Longrightarrow$ Nashovo "záplatové" řešení
  2. Vytvořit nový model
     - vede na model *Kooperativních her*

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Tržní hry (Market games)*

Cíl modelu? *Pochopení chování trhu*

Trh

Vektor $(N, \mathbb{R}^m_+, A, w)$ je **trh**, pokud splňuje:

- N ... množina hráčů
- $\mathbb{R}^m_+$ ... prostor komodit
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ... matice počátečních alokací
  - $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a^1 & a^2 & \dots & a^n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$
  - $a^i \in \mathbb{R}^m$ ... komodity vlastněné i-tým hráčem
- $w = w_1 \times w_2 \times \dots w_n$ ... užitkové funkce hráčů
  - $w_i \colon \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ ... užitková funkce i-tého hráče
  - w_i je spojitá konkávní funkce

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Tržní hry (Market games)*

Tržní hry jsou hry s **přenosnou výhrou (transferable utility)**

- lépe vysvětlíme, až zadefinujeme kooperativní hru
- prozatím: existuje další komodita (peníze), v rámci které hráči hodnotí svůj zisk
- formálně: $W_i(x, \zeta) = w_i(x) + \zeta$
  - $x \in \mathbb{R}^m$ ... vektor komodit
  - $\zeta \in \mathbb{R}$ ... peníze
  - ζ může být i záporná hodnota
    - částka, kterou jsme utratili za nákup komodit

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Tržní hry (Market games)*

Cíl tržní hry? Určit, jak bude probíhat *obchod* v rámci trhu

Obchod koalice S

Obchod na trhu $(N, \mathbb{R}^n_+, A, w)$ mezi hráči $\emptyset \neq S \subseteq N$ je kolekce $(x^i, \zeta^i)_{i \in S}$ splňující:

1. $\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} a^i$ (zachování zboží)
2. $\sum_{i \in S} \zeta^i = 0$ (zachování peněz).

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Tržní hry (Market games)*

Cíl tržní hry? Určit, jak bude probíhat *obchod* v rámci trhu

Obchod koalice S

Obchod na trhu $(N, \mathbb{R}^n_+, A, w)$ mezi hráči $\emptyset \neq S \subseteq N$ je kolekce $(x^i, \zeta^i)_{i \in S}$ splňující:

1. $\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} a^i$ (zachování zboží)
2. $\sum_{i \in S} \zeta^i = 0$ (zachování peněz).

Otázky:

- Jaké skupiny hráčů uzavřou dohody o obchodu?
- K jakému dojde obchodu v rámci dané skupiny?
  - *Jaký zisk bude mít hráč* $\boldsymbol{i}$ *na daném trhu?*

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Volební hry (Voting games)*

Cíl modelu: *Zkoumání volebních systémů a formování koalic*

Volební hra

Dvojice $(N, \mathcal{W})$ je **volební hra**, pokud splňuje:

- N … množina hráčů
- $\mathcal{W} \subseteq 2^N$ … množina vítězných koalic
  - $\emptyset \notin \mathcal{W}$
  - $S \subseteq T \wedge S \in \mathcal{W} \implies T \in \mathcal{W}$

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Volební hry (Voting games)*

Cíl modelu: *Zkoumání volebních systémů a formování koalic*

Volební hra

Dvojice $(N, \mathcal{W})$ je **volební hra**, pokud splňuje:

- N ... množina hráčů
- $\mathcal{W} \subseteq 2^N$ ... množina vítězných koalic
  - $\emptyset \notin \mathcal{W}$
  - $S \subseteq T \wedge S \in \mathcal{W} \implies T \in \mathcal{W}$

Speciální případ: **(vážené) majoritní hry**

- $v_i \in \mathbb{R}$ ... síla hlasu hráče i
- $v(S) = \sum_{i \in S} v_i$ ... síla koalice $S \subseteq N$
- $S \in \mathcal{W} \iff v(S) \geq k$
  - $k \in \mathbb{R}$ ... volební kvóta

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Volební hry (Voting games)*

Speciální případ: **(vážené) majoritný hry**

- $v_i \in \mathbb{R}$ ... síla hlasu hráče i
- $v(S) = \sum_{i \in S} v_i$ ... síla koalice $S \subseteq N$
- $S \in \mathcal{W} \iff v(S) \geq k$
    - $k \in \mathbb{R}$ ... volební kvóta

Příklad aplikace: Volební systém RB OSN

- 15 členů (z toho 5 stálých)
- ti mají právo veta
- k přijetí rezoluce je třeba 9 hlasů
- $N = \{1, \ldots, 15\}$
- $k = 39$
- $v_i = \begin{cases} 7 & i = 1, \ldots, 5 \\ 1 & i = 6, \ldots, 15 \end{cases}$

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Problém sdílení nákladů (cost-sharing problem)*

Cíl modelu: *Vede spolupráce ke snížení nákladů?*

- N … množina hráčů
- $c(S)$ … cena nákladů za službu sdílenou hráči $S \subseteq N$
  - $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$
  - společné řešení simulováno sjednocením individuálních

Příklady:

- zásobování pitnou vodou
- svoz komunálního odpadu
- předplatné odborných žurnálů

Příklady modelů zaměřených na kooperaci: *Hry s minimálními kostrami grafu*

Cíl modelu: *Nalézt nejlepší připojení hráčů ke zdroji*

- $N = N' \cup \{0\}$ ... množina hráčů + zdroj
- c_{ij} ... cena propojení i, j
- řešení: síť, v které je každý $i \in N$ dosažitelný z 0 s minimálním součtem cen

Kooperativní hra

Kooperativní hra (N, v) je dvojice, kde N je množina hráčů a $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ je *charakteristická funkce* kooperativní hry. Platí, že $v(\emptyset) = 0$.

- Γ^n ... množina kooperativních her n hráčů
- $S \subseteq N$ ... koalice
- $v(S)$ ... hodnota koalice
- obvykle $N = \{1, \ldots, n\}$
  - (S, v_S) je **podhra** (N, v):
    - $v_S\colon 2^S \to \mathbb{R}$
    - $v_S(T) := v(T)$ pro $T \subseteq S$

Příklady reprezentované kooperativní hrou: Tržní hra

- $(N, \mathbb{R}^m_+, A, w)$ ... trh

Přípustná S-alokace (feasible S-allocation)

Přípustná S**-alokace** je $(a^i_S)_{i\in S}$ taková, že

$$\sum_{i\in S} a^i_S = \sum_{i\in S} a^i.$$

Množinu všech přípustných S-alokací značíme $\mathcal{A}_S$.

Příklady reprezentované kooperativní hrou: Tržní hra

- $(N, \mathbb{R}^m_+, a, w)$ ... trh

Přípustná S-alokace (feasible S-allocation)

Přípustná S**-alokace** je $(a^i_S)_{i \in S}$ taková, že $\sum_{i \in S} a^i_S = \sum_{i \in S} a^i$.
Množinu všech přípustných S-alokací značíme $\mathcal{A}_S$.

Tržní hra

Kooperativní hra (N, v) je **tržní hra**, pokud existuje trh $(N, \mathbb{R}^m_+, A, w)$ takový, že

$$v(S) = \max\{\sum_{i \in S} w^i(a^i_S) \mid (a^i_S)_{i \in S} \in \mathcal{A}_S\}.$$

Příklady reprezentované kooperativní hrou: *Volební hry (Voting games)*

Volební hra

Dvojice $(N, \mathcal{W})$ je **volební hra**, pokud splňuje:

- N ... množina hráčů
- $\mathcal{W} \subseteq 2^N$ ... množina vítězných koalic
  - $\emptyset \notin \mathcal{W}$
  - $S \subseteq T \wedge S \in \mathcal{W} \implies T \in \mathcal{W}$

Příklady reprezentované kooperativní hrou: *Volební hry (Voting games)*

Volební hra

Dvojice $(N, \mathcal{W})$ je **volební hra**, pokud splňuje:

- N ... množina hráčů
- $\mathcal{W} \subseteq 2^N$ ... množina vítězných koalic
  - $\emptyset \notin \mathcal{W}$
  - $S \subseteq T \wedge S \in \mathcal{W} \implies T \in \mathcal{W}$

Jednoduchá hra (*simple game*)

Jednoduchá hra (simple game) (N, v) splňuje:

1. $v \colon 2^N \to \{0, 1\}$
2. $S \subseteq T \wedge v(S) = 1 \implies v(T) = 1$

- $v(S) = 1 \iff S \in \mathcal{W}$

Příklady reprezentované kooperativní hrou: Problém sdílení nákladů

Cíl modelu: *Vede spolupráce ke snížení nákladů?*

- N ... množina hráčů
- $c(S)$ ... cena nákladů za službu sdílenou hráči $S \subseteq N$
  - $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$
  - společné řešení simulováno sjednocením individuálních

Kooperativní hra

- $c\colon 2^N \to \mathbb{R}$
- jedná se o takzvanou cost game (N, v)
  - $c(S)$ ... hodnota reprezentuje výdaje
  - $v(S)$ ... hodnota reprezentuje *přínos*

Kooperativní hra - třídy her

Příklad: *Větší koalice je lepší koalice...*

- **monotónní hra** ($S \subseteq T \subseteq N$)

$$v(S) \leq v(T)$$

- **superadditivní hra** ($S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$)

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

  - $S \cup T$ se může vnitřně chovat jako S a T
  - neplatí když větší koalice $\implies$ větší výdaje na management
  - cost-games: $c(S) + c(T) \geq v(S \cup T)$ ... **subadditivní hra**

- **konvexní hra** ($S, T \subseteq N$)

$$v(S) + v(T) \leq {\color{red}v(S \cap T)} + v(S \cup T)$$

Např. *větší koalice je lepší koalice*

- **monotónní hra** ($S \subseteq T \subseteq N$)

$$v(S) \leq v(T)$$

- **superadditivní hra** ($S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$)

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$$

- **konvexní hra** ($S, T \subseteq N$)

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cap T) + v(S \cup T)$$

  - též **supermodulární hra**
  - cost-game: $c(S) + c(T) \geq c(S \cap T) + c(S \cup T)$
    - **konkávní (submodulární)**

O peníze jde až na prvním místě...

- **Výplatní vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$**
  - x_i reprezentuje výplatu hráče i
- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **eficientní**, pokud $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$
  - Obvykle rozdělujeme $v(N)$
    1. *hodnota spolupráce* $v(N)$
    2. *společné výdaje* $c(N)$
- Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je **individuálně racionální**, pokud $x_i \geq v(i)$
  - pro hráče má smysl uvažovat oproti $v(i)$

- $\mathcal{I}^*(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N)\}$ ... **preimputace**
  - $x(S) := \sum_{i \in S} x_i$
- $\mathcal{I}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid \forall i \in N : x_i \geq v(i)\}$ ... **imputace**

Kooperativní hra - Koncept řešení

- Množina výplatních vektorů, splňující předepsané vlastnosti tvoří **koncepty řešení (solution concepts)**
- Může jít o rozdělení zisku, které je
  - *...spravedlivé...*
  - *...nediskriminující...*
  - *...stabilní (hráči s ním budou souhlasit)...*
  - *...*

Příklad konceptu řešení: Jádro

Idea: *Rozdělení zisku vedoucí ke spolupráci...*

Jádro

Pro kooperativní hru (N, v) je **jádro** $\mathcal{C}(v)$ rovno

$$\mathcal{C}(v) = \{x \in \mathcal{I}^*(v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subseteq N\}.$$

- předpoklad: *homo economicus (člověk ekonomický)*
  - model člověka jako hráče
  - důsledně racionální a sobecký
  - optimálně sleduje své subjektivní cíle
- $v(N)$ ... hodnota, kterou chceme rozdělit
- $x(S) > v(S) \implies$ koalice S se neodtrhne od N
  - odtržení vede na podhru (S, v_S)
  - $v(S)$ ... rozdělovaná hodnota

Příklad konceptu řešení: Shapleyho hodnota

Idea: *Rozdělení zisku spravedlivým způsobem...*

Shapleyho hodnota

Pro kooperativní hru (N, v) je **Shapleyho hodnota** $\phi(v)$ pro hráče i rovna

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup i) - v(S)\right)$$

- $v(S \cup i) - v(S)$
  - *marginální přínos* (hráče i pro $S \cup i$)
- $\frac{s!(n-s-1)!}{n!}$
  - škálování podle velikosti a počtu koalic
- $\sum_{S \subseteq N \setminus i}$
  - součet všech marginálních přínosů hráče i

Formálně:

1. množinově
   - $\Sigma(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dots\}$
2. funkcionálně
   - $\Sigma\colon \Gamma^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$

Formálně:

1. množinově
   - $\Sigma(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ldots\}$
2. funkcionálně
   - $\Sigma \colon \Gamma^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$

Dělíme na

1. **jednobodové (single-point)**
   - množinově: $\Sigma(v) = \{x\}$
     - raději: $\Sigma(v) = x$
   - funkcionálně: $\Sigma \colon \Gamma^n \to \mathbb{R}$
2. **vícebodové (multi-point)**

Shapleyho hodnota alternativně

Je možné popsat pomocí vlastností...

Shapleyho hodnota

Shapleyho hodnota $\phi(v)$ je jediná funkce $f: \Gamma^n \to \mathbb{R}$ splňující pro všechny hry $(N, v), (N, w)$:

1. (AXIOM EFICIENCE)
   - $\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$
2. (AXIOM SYMETRIE)
   - $\forall i, j \in N\ (\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\} : v(S \cup i) = v(S \cup j)) \implies f_i(v) = f_j(v)$
3. (AXIOM NULOVÉHO HRÁČE)
   - $\forall i \in N\ (\forall S \subseteq N : v(S) = v(S \cup i)) \implies f_i(v) = 0$
4. (AXIOM ADITIVITY)
   - $v, w \in \Gamma^n : f(v + w) = f(v) + f(w)$

Kooperativní hry

Kooperativní hra je dána množinou hráčů a hodnotami, které určují hodnotu každé skupiny hráčů (*koalice*). Tyto hodnoty jsou zakódovány pomocí *charakteristické funkce* hry. Cílem kooperativní teorie her je nalézt výplatu (ve formě **výplatních vektorů**) pro jednotlivé hráče v závislosti na hodnotách hry. Výplatní vektory splňující další vlastnosti tvoří **koncepty řešení**. Ty je možné popsat několika způsoby:

1. množinově
2. funkcionálně
   2.1 vzorcem
   2.2 pomocí vlastností