Lineární algebra II - 20.3. CV 4

Mějme $k+1$ bodů $(x_0, y_0) \dots (x_k, y_k)$ s různými x-ovými souřadnicemi. Prochází jimi právě jeden polynom stupně k. Lagranžův interpolační polynom $L(x)$ je způsob, jak tento polynom stupně k získat.

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x)$$

kde

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Malá Fermatova věta:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mod p)$$

O λ řekneme, že je vlastní číslo čtvercové matice A, pokud existuje vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ splňující rovnici $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Vlastní čísla λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu $p_A(t) = |A - tI|$.

Vlastní vektory příslušné danému λ_i splňují rovnost $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$, neboli jsou řešením homogenní soustavy $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Matice řádu n je diagonalizovatelná právě když má n vlastních čísel a prostory vlastních vektorů mají dimenze rovny algebraickým násobnostem příslušných vlastních čísel.

I) Proložte danými body v rovině interpolační polynom.
a) $(1, -2), (2, 2), (-2, 2) \in \mathbb{R}^2$
b) $(-1, -9), (1, -3), (2, 3) \in \mathbb{R}^2$
c) $(-1, 10), (1, 4), (4, 25) \in \mathbb{R}^2$
d) $(4, 0), (1, 4), (2, 4) \in \mathbb{Z}_5^2$

II) Spočtěte nad $\mathbb{Z}_5$ následující podíly polynomů.
a) $4x^3 + 3x^2 + 4x + 3 : 2x^2 + 3x + 3$
b) $x^5 + 1 : x + 2$
c) $3x^2 + 2x^2 + 1 : x^2 + 2x + 2$

III) Určete, kolik je různých polynomů p stupně nejvýše tři nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ takových, že $p(3) = 2$. Popište všechny takové polynomy.

IV) V tělese $\mathbb{Z}_p$ nalezněte polynom, stupně nejvýše p, který nabývá stejných hodnot.

a) V tělese $\mathbb{Z}_5$, $p(x) = 4x^{20} + 3x^{17} + 2x^{16} + x^{13} + 3x^{12} + 2x^{10} + 4x^9 + 2x^7 + 2x^5 + x + 3$.

b) V tělese $\mathbb{Z}_7$, $p(x) = 5x^{16} + 6x^{15} + 4x^{13} + x^{12} + 3x^{11} + 6x^{10} + 2x^9 + 3x^7 + 5x^5 + 2x + 1$.

V) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

VI) Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$. Určete, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Bonus