Lineární algebra II - 5.3. CV 3

I) Spočtěte následujících determinanty.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0.8 & \pi \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4/5 & 3/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/3 & 1 & 0 & 1/3 \\ -1 & 5/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

II) Trochu zajímavější determinanty. Matice berte jako $n \times n$.

a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$

III) Spočtěte následující determinant matice velikosti $2n \times 2n$ a) jak umíte b) rozvojem podle řádků či sloupců. Příklad pro $n = 3$.

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

IV) Jsou-li čísla 697, 476 a 969 dělitelná 17 (a to jsou), je také determinant matice $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ dělitelný 17? Zkuste úlohu řešit jinak, než výpočtem determinantu a ověření, že je dělitelný.

V)

S využitím determinantu zjistěte, kdy je dimenze lineárního obalu vektorů $\{(1, a, 1, a)^T, (1, -1, 1, a)^T, (a, 1, 1, 1)^T, (a, 0, 0, -a)^T\}$ rovna 4.

VI)

Pomocí determinantu rozhodněte, kdy má soustava jediné řešení a toto řešení spočtěte pomocí Cramerova pravidla.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & a^2 & a \end{array}\right)$$