

Vrcholové pokrytí (“vertex cover”) v grafu $G = (V, E)$ je množina vrcholů, co “vidí do všech hran”, tj. $(C \subseteq V)(\forall e \in E): e \cap C \neq \emptyset$. Nejmenší vrcholové pokrytí v G značíme $c(G)$.

Párování (“matching”) v G je množina disjunktních hran z E . Největší párování v G značíme $m(G)$.

Kőnigova–Egerváryho věta: V každém *bipartitním* grafu G platí $c(G) = m(G)$.

Hallova věta pro grafy: V bipartitním grafu G s partitami A a B existuje párování velikosti $|A|$ právě tehdy, když pro každou množinu $A' \subseteq A$ platí $|N(A')| \geq |A'|$.

Množinové systémy

Příklad 1 (Trojice z devíti)

Je dáno několik 3prvkových podmnožin 9prvkové množiny $D = \{1, 2, \dots, 9\}$ takových, že každé dvě podmnožiny mají nejvýše 1 společný prvek.

1. Dokažte, že každý prvek $x \in D$ náleží nejvýše čtyřem podmnožinám.
2. Dokažte, že podmnožin může být nejvýše 12.
3. Najděte příklad 12 takových podmnožin.

Pokrytí a párování

Příklad 2 (Párování a vrcholové pokrytí)

1. Najděte G , kde $c(G) > m(G)$.
2. Najděte G , kde $c(G) > m(G) + 10$.
3. Ukažte, že pro každé G platí $m(G) \leq c(G) \leq 2 \cdot m(G)$.

Příklad 3

Nechť G je bipartitní graf s partitami A a B . Předpokládejme, že pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí, že všechny vrcholy partity A mají stupeň aspoň k a všechny vrcholy partity B mají stupeň nejvýše k . Ukažte, že G má párování velikosti $|A|$.

Příklad 4

Dokažte, že každý (nenulově) regulární bipartitní graf má perfektní párování. (Graf je regulární, pokud mají všechny jeho vrcholy stejný stupeň. Párování P je perfektní, pokud každý vrchol patří do nějaké hrany v P .)

Příklad 5

Najděte všechna perfektní párování v Petersenově grafu, a ukažte, že víc jich existovat nemůže.

