

KPR

Konečná projektivní rovina je dvojice $(X, \mathcal{P})$, kde X je množina bodů a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ je množina přímek, splňující následující axiomy:

1. Každé dva body určují přímku: $\forall x \neq y \in X : \exists! P \in \mathcal{P} : x, y \in P$.
2. Každé dvě přímky se protínají v jednom bodě: $\forall P \neq Q \in \mathcal{P} : |P \cap Q| = 1$.
3. Existují čtyři body takové, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce: $\exists Q \subseteq X : |Q| = 4 \wedge \forall P \in \mathcal{P} : |P \cap Q| \leq 2$.

Řád KPR je počet bodů na jedné přímce minus 1. Je-li řád KPR n , pak počet bodů i počet přímek je $n^2 + n + 1$, každá přímka obsahuje $n + 1$ bodů a každý bod leží na $n + 1$ přímkách.

KPR, latinské čtverce**Příklad 1 (Pokrytí)**

Kolik minimálně bodů musíme vybrat z KPR $(X, \mathcal{P})$, aby každá přímka $P \in \mathcal{P}$ obsahovala alespoň jeden z těchto bodů?

Kolik minimálně přímek musíme vybrat, aby pokryly všechny body?

Příklad 2 (Počty)

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ platí:

- $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$
- $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$
- $\forall x \in X : |\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}| = n + 1$

Je pak $(X, \mathcal{P})$ nutně konečná projektivní rovina?

Příklad 3 (Grafy bez čtyřcyklů)

Ukažte, že pro nekonečně mnoho n existuje graf s n vrcholy a $\Omega(n^{\frac{3}{2}})$ hranami, který neobsahuje čtyřcyklus jako podgraf.

Příklad 4 (Samoopravné kódy)

Uvažujme množinu B_n (binárních) stringů délky n . Pro $x, y \in B_n$ označme $d(x, y)$ počet pozic, na kterých se stringy liší. Pro silné samoopravné kódy je dobré najít velkou množinu stringů $M \subseteq B_n$ takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích, tj. $(\forall x, y \in M) : d(x, y) \geq 3$ (pak totiž dokážeme “opravit 1 chybu”). Jeden takový kód teď sestojíme:

1. Pomocí Fanovy roviny zkonstruujte množinu $F \subseteq B_7$ sedmi stringů délky 7 takových, že každé dva se liší na 4 pozicích, tj. $(\forall x, y \in F) : d(x, y) = 4$.
2. Pro daný string x označme $\bar{x}$ jeho doplněk, tj. string, který má na každé pozici opačný symbol. Určete $d(\bar{x}, x)$ a $d(\bar{x}, y)$ pro $x \neq y \in F$.
3. Najděte množinu $M \subseteq B_7$ celkem 16 stringů takovou, že každé dva stringy se liší na aspoň 3 pozicích.

Příklad 5 (Permutace)

Rozhodněte, zda permutace řádků a sloupců zachovávají vlastnost „být latinským čtvercem“ a zda tyto operace zachovávají ortogonalitu.

Příklad 6 (They are the same picture)

Najděte dva ortogonální latinské čtverce 3×3 a sestrojte s jejich pomocí konečnou projektivní rovinu řádu 3.