

Catalanova čísla

Catalanova čísla splňují rekurenci $C_n = \sum_{0 \leq i \leq n} C_i C_{n-1-i}$. Na přednášce jste si ukázali, že $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

KPR

Konečná projektivní rovina je dvojice $(X, \mathcal{P})$, kde X je množina bodů a $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ je množina přímek, splňující následující axiomy:

1. Každé dva body určují přímku: $\forall x \neq y \in X : \exists! P \in \mathcal{P} : x, y \in P$.
2. Každé dvě přímky se protínají v jednom bodě: $\forall P \neq Q \in \mathcal{P} : |P \cap Q| = 1$.
3. Existují čtyři body takové, že žádné tři z nich neleží na jedné přímce: $\exists Q \subseteq X : |Q| = 4 \wedge \forall P \in \mathcal{P} : |P \cap Q| \leq 2$.

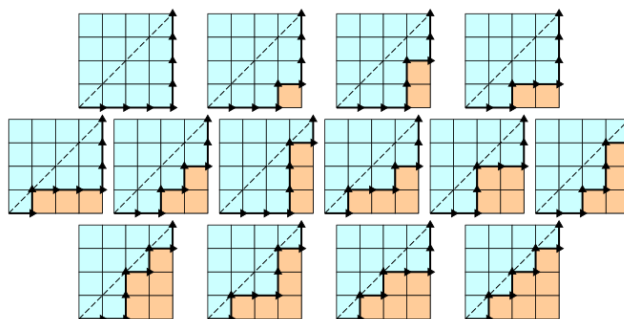
Řád KPR je počet bodů na jedné přímce minus 1. Je-li řád KPR n , pak počet bodů i počet přímek je $n^2 + n + 1$, každá přímka obsahuje $n + 1$ bodů a každý bod leží na $n + 1$ přímkách.

Rekurence, Catalanova čísla**Příklad 1**

Vyřešte následující rekurenci pomocí vytvořujících funkcí: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_k$

Příklad 2

Ukažte, že počet cest v mřížce $n \times n$ z levého dolního do pravého horního rohu, aniž bychom překročili úhlopříčku, je roven Catalanovu číslu C_n .

**Příklad 3**

Kolik existuje možných triangulací pravidelného n -úhelníku s vrcholy očíslovanými $1, \dots, n$?

KPR**Příklad 4 (Alternativní axiomatizace)**

Ukažte, že axiom 3 lze nahradit axiomem "Existují alespoň dvě přímky, z nichž každá obsahuje alespoň 3 body." (Formálně $\exists P \neq Q \in \mathcal{P} : |P| \geq 3 \wedge |Q| \geq 3$.)

Příklad 5 (Incidenční graf)

Incidenční graf roviny $(X, \mathcal{P})$ je bipartitní graf G , který má vlevo vrcholy X , vpravo vrcholy $\mathcal{P}$ a mezi nimi všechny ty hrany (x, P) , kde $x \in P$. Dokažte, že G neobsahuje jako podgraf ani cyklus C_3 ani C_4 ani C_5 .

Příklad 6 (Pokrytí)

Kolik minimálně bodů musíme vybrat z KPR $(X, \mathcal{P})$, aby každá přímka $P \in \mathcal{P}$ obsahovala alespoň jeden z těchto bodů?

Kolik minimálně přímek musíme vybrat, aby pokryly všechny body?

Příklad 7 (Počty)

Nechť $(X, \mathcal{P})$ je množinový systém a pro $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ platí:

- $|X| = |\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$
- $\forall P \in \mathcal{P} : |P| = n + 1$
- $\forall x \in X : |\{P \in \mathcal{P} : x \in P\}| = n + 1$

Je pak $(X, \mathcal{P})$ nutně konečná projektivní rovina?