

Vytvořující funkce

Vytvořující funkce posloupnosti $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je mocninná řada $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots$

Vytvořující funkce posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ je $\frac{1}{1-x}$.

Řešení rekurencí pomocí vytvořujících funkcí

1. Vynásobíme rekurenci x^n a sečteme pro všechna n , pro která to dává smysl.
2. Označme jako $F(x)$ vytvořující funkci posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$. Nyní nahradíme všechny nekonečné výrazy vhodně upraveným $F(x)$ (typicky odečítáme první členy a násobíme vhodnou mocninou x).
3. Vyřešíme vzniklou rovnici.
4. Získáme ze získané funkce posloupnost a explicitní vzorec pro a_n .
5. (Ověříme, že prvních pár hodnot odpovídá.)

Zobecněná binomická věta

Pro libovolné $r \in \mathbb{R}$ platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots + \binom{r}{r}x^r$$

kde $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$. ($\binom{r}{0} = 1$.)

Důsledek: Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in (-1, 1)$ platí

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{n-1} x^k.$$

Příklad 1 (Slovní úloha)

Kolika způsoby lze naplnit košík n ovocnými plody za následujících podmínek?

- Počet jablek musí být sudý,
- počet banánů je dělitelný pěti,
- v košíku jsou nejvýše čtyři pomeranče
- a jedna nebo žádná hruška.

Binomická věta**Příklad 2**

Najděte vytvořující funkci pro následující posloupnosti:

1. $(1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots, (k+1) \cdot (k+2), \dots)$
2. $(1, 4, 9, 16, \dots, (k+1)^2, \dots)$

3. $(0, 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots)$

Příklad 3

Určete koeficient u příslušné mocniny x v následujících výrazech (stačí vyjádřit jako binomický koeficient):

1. U x^3 ve výrazu $\frac{1}{(1-x)^5}$

2. U x^{15} ve výrazu $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4$

3. U x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \dots)^6$

Rekurence**Příklad 4 (Rekurence)**

Vyřešte následující rekurence pomocí vytvořujících funkcí:

1. $a_0 = 2, a_n = 3a_{n-1} - 1$ pro $n \geq 2$.

2. $a_0 = 3, a_1 = 5, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ pro $n \geq 3$.

3. $a_0 = 4, a_1 = 3, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3 \cdot 2^n$ pro $n \geq 2$

4. $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_k$

Příklad 5 (Triangulace)

Kolik existuje možných triangulací pravidelného n -úhelníku s vrcholy očíslovanými $1, \dots, n$?