

Z minula (Dirichletův princip a Ramseyovy věty)

Příklad 1 (Tabulka)

Políčka nekonečné tabulky obarvujeme 3 barvami. Dokažte, že

1. V libovolném řádku existuje deset políček, která mají všechna stejnou barvu.
2. Existují dva řádky a dva sloupce takové, že 4 políčka v jejich průsečících mají stejnou barvu.
3. Existuje 10 řádků a 10 sloupců takových, že 100 políček v jejich průsečících má stejnou barvu.

Příklad 2 (Erdős-Szekeres pro monotónní posloupnosti)

Dokažte, že každá posloupnost $n^2 + 1$ navzájem různých čísel obsahuje rostoucí nebo klesající podposloupnost délky $n + 1$.

Příklad 3 (Ramsey?)

Pro $N \in \mathbb{N}$ označme K_N úplný graf na vrcholech $V = \{1, 2, \dots, N\}$. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech.
2. Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný podgraf $K_{10,10}$ na 20 vrcholech.
3. Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, *ktej obsahuj vrchol číslo 1*.
4. Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech, *jehož každý vrchol je mocnina dvojky*.
5. Pro každé dostatečně velké $N \in \mathbb{N}$ platí, že kdykoliv obarvíme hrany K_N a smyčky dvěma barvami, tak bude existovat jednobarevný úplný podgraf na 10 vrcholech (i se smyčkami).

Příklad 4 (IMO 1964, P4)

Dokažte, že $R_2(3, 3, 3) \leq 17$.

Příklad 5 (Schurova věta)

Dokažte, že pro každé obarvení všech přirozených čísel (bez nuly) dvěma barvami najdeme $x, y \in \mathbb{N}$ takové, že $x \neq y$ a navíc x, y a $x + y$ mají stejnou barvu.

Ramseyovy věty podruhé

Barvíme všechny p -prvkové podmnožiny nějaké dané množiny (buď $[N]$ nebo $\mathbb{N}$) pomocí b různých barev. Řekneme, že podmnožina velikosti $m \geq p$ je *jednobarevná*, pokud každá její p -prvková podmnožina dostala tu samou barvu.

Ramseyova věta pro hypergrafy: Mějme $p, b, m \in \mathbb{N}$. Pak $\exists N \in \mathbb{N}$, že v každém obarvení všech p -prvkových podmnožin množiny $[N]$ pomocí b barev existuje jednobarevná m -prvková podmnožina.

Nekonečná Ramseyova věta: Mějme $p \in \mathbb{N}$. Pak pro každé obarvení všech p -prvkových podmnožin $\mathbb{N}$ pomocí b barev existuje nekonečná jednobarevná podmnožina.

Příklad 6

Řekněme, že $(p, b, N) = (3, 2, 5)$, tj. obarvujeme 3-prvkové množiny $[5]$ pomocí 2 barev.

1. Kolik takových podmnožin je?
2. Kolik je možných obarvení?
3. Najděte obarvení, které *neobsahuje* jednobarevnou podmnožinu velikosti $m = 4$.

Příklad 7

Dokažte, že každá nekonečná posloupnost přirozených čísel obsahuje nekonečnou konstantní podposloupnost nebo nekonečnou rostoucí podposloupnost.

Příklad 8

Řekněme, že množina M přirozených čísel je *superlichá* (resp. *supersudá*), pokud $\forall x, y \in M$ má číslo $a + b$ lichý (resp. sudý) počet různých prvočíselných dělitelů.

1. Dokažte, že existuje nekonečná superlichá množina nebo nekonečná supersudá množina.
2. Dokažte, že existuje nekonečná superlichá množina i nekonečná supersudá množina.

Něco málo o (samo)opravných kódech

Připomenutí: Označme $S_n = \{0, 1\}^n$ množinu binárních stringů délky n . *Hammingova vzdálenost* dvou stringů $x, y \in S_n$ je počet bitů, které musíme v x změnit, abychom dostali y . Značí se $d(x, y)$. *(Samo)opravný kód* je podmnožina $C \subseteq S_n$. *Minimální vzdálenost kódu* C je $d = \min\{d(x, y) \mid x, y \in C, x \neq y\}$. Kód *opraví až c chyb*, pokud pro každý string $y \in S_n$ existuje nejvýše jedno kódové slovo $x \in C$, že $d(x, y) \leq c$.

Příklad 9

Uvažme $n = 3$ a kódy $C_1 = \{000, 111\}$, $C_2 = \{001, 010, 110\}$, $C_3 = \{000, 011, 101, 110\}$. Jaká je minimální vzdálenost kódů C_1, C_2, C_3 ? Kolik chyb opraví?

Příklad 10

Ať $C \subseteq S_n$ je kód, pro který je minimální vzdálenost lichá, tj. $d = 2t + 1$.

1. Kolik chyb C opraví?
2. Z C vyrobíme nový kód $C' \subseteq \{0, 1\}^{n+1}$ tak, že každé slovo prodloužíme o jeden symbol určující paritu počtu jedniček v daném slově. Jakou minimální vzdálenost má C' ? Kolik chyb opraví?

Příklad 11

Hledáme kód $C \subseteq S_7$ s $d = 3$ a co nejvíce stringy.

1. Vzpomeňte si, jak vyrobit takový kód o 16 slovech.
2. Dokažte, že jakýkoliv kód $C \subseteq S_7$ s $d = 3$ musí splňovat $|C| \leq 16$.