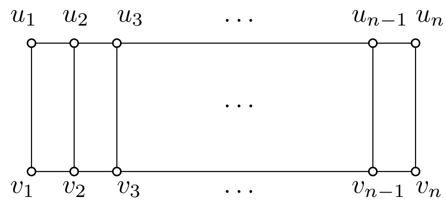
Základy kombinatoriky a teorie grafů
Zadání domácích úkolů

6. května 2018

1 Zadáno 25. 2. 2018

Příklad 1. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[3]**

Příklad 2. *Graf M nazveme* párováním, *pokud žádné dvě hrany v M nemají společný vrchol.* Perfektní párování *je párování, ve kterém hrany pokrývají všechny vrcholy. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete počet perfektních párování v žebříku Z_n:* **[2]**



Příklad 3. *Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.* **[3]**

2 Zadáno 25. 3. 2018

Příklad 4. *Při hledání maximálního toku jsou kapacitami omezené hrany. Někdy se ale může stát, že budeme potřebovat nějaké kapacity přiřadit i vrcholům („vrcholem v nesmí protéct víc než x litrů tekutiny za jednotku času“). Jak najít maximální tok splňující i tuto podmínku?* **[2]**

Příklad 5. *Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů.* **[3]**

Příklad 6. *Stromy a 1-faktory.*

(a) Ukažte, že každý strom obsahuje nanejvýš jedno perfektní párování. **[2]**

(b) Ukažte, že strom má perfektní párování právě tehdy, když po odebrání libovolného vrcholu má vzniklý les právě jednu lichou komponentu. **[3]**

3 Zadáno 8. 4. 2018

Příklad 7. *Určete koeficient u členu x^{28} ve výrazu $(x + x^3 + x^5 + \cdots)^6$. Vyjádřete jej ve tvaru $\binom{p}{q}$ pro nějaká přirozená čísla p a q.* **[2]**

Příklad 8. *Spočítejte počet způsobů, kterými lze konvexní n-úhelník rozdělit pomocí úhlopříček na trojúhelníky.* **[3]**

Příklad 9. *Nechť G je souvislý rovinný graf s v vrcholy, který splňuje následující podmínky:*

- *$v = 8k$ pro nějaké přirozené číslo k,*
- *$\frac{5v}{8}$ vrcholů má stupeň tři, $\frac{v}{4}$ vrcholů má stupeň čtyři a $\frac{v}{8}$ vrcholů má stupeň pět,*
- *všechny stěny v rovinném nakreslení G jsou buď trojúhelníky nebo čtyřúhelníky.*

Nakreslete rovinné nakreslení aspoň jednoho takového grafu. Kolik vrcholů, hran, trojúhelníkových a čtyřúhelníkových stěn takový graf může mít? **[3]**

4 Zadáno 16. 4. 2018

Příklad 10. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Najděte rovinné nakreslení grafu jeho doplňku na co nejvíce vrcholech.* **[3]**

Příklad 11. *Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení hran:*

(a) K_8, **[2]**

(b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**

Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $e \leq v + f$.

Příklad 12. *Nakreslete na torus graf* $K_{3,6}$ *bez křížení hran.* **[2]**

5 Zadáno 6. 5. 2018

Příklad 13. *Orientovaný graf* G *je silně souvislý, pokud pro každé jeho dva vrcholy* u *a* v *existují orientované cesty z* u *do* v *a z* v *do* u.

(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů $X \subset V$. **[3]**

(b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus. **[4]**

Příklad 14. *Ukažte, že každý graf s* N *vrcholy, který neobdsahuje* $K_{2,2}$ *jako podgraf, má nanejvýš* $\frac{1}{2}(N^{3/2} + N)$ *hran.* **[4]**