Základy kombinatoriky a teorie grafů — 9. cvičení*

23. dubna 2018

1 Ušaté lemma a bloková struktura grafů

Hranový řez grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že graf $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý. *Vrcholový řez grafu* $G = (V, E)$ je množina vrcholů $A \subseteq V$ taková, že graf $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý. *Hranová souvislost* $k_e(G)$ *grafu* $G = (V, E)$ je velikost nejmenšího hranového řezu v G. *Vrcholovou souvislost* $k_v(G)$ *grafu* $G = (V, E)$ definujeme jako $k - 1$, je-li G úplný graf K_k, a jako velikost nejmenšího vrcholového řezu jinak. Graf je *hranově* k*-souvislý*, pokud platí $k_e(G) \geq k$ a *vrcholově* k*-souvislý*, pokud platí $k_v(G) \geq k$.

Věta (Ušaté lemma)**.** *Graf je vrcholově 2-souvislý právě tehdy, když jej umíme dostat z cyklu postupným operacemi přidávání hrany a podrozdělením hrany (položením nového vrcholu „na hranu".)*

Z přednášky víme, že odebráním hrany vrcholová ani hranová souvislost nevzroste a klesne nanejvýš o jedna.

Příklad 1. *Buď* G *kriticky 2-souvislý graf, to znamená, že je vrcholově 2-souvislý, ale žádný z grafů* $G - e$ *pro libovolné* $e \in E(G)$ *není vrcholově 2-souvislý.*

(a) Dokažte, že alespoň jeden vrchol G *má stupeň 2.*

(b) Pro každé n *uveďte příklad kriticky 2-souvislého grafu s vrcholem stupně alespoň* n*.*

Příklad 2. *Ukažte, že vrcholově 2-souvislý graf graf je kriticky 2-souvislý právě tehdy, když žádný jeho cyklus neindukuje chordu, čili hranu mimo cyklus.*

Příklad 3. *Dokážete vymyslet variantu Ušatého lemma pro hranovou 2-souvislost?*

Příklad 4. *Řekneme, že dvě hrany* e *a* f *hranově 2-souvislého grafu* G *jsou ekvivalentní, psáno* $e \simeq f$*, pokud* $e = f$ *nebo* $G - e - f$ *není souvislý. Ukažte, že*

(a) platí $e \simeq f$ *právě tehdy, když* e *a* f *jsou obsaženy v tentýž cyklech.*

(b) $\simeq$ *je relace ekvivalence.*

(c) po odstranění hran ležících v téže třídě ekvivalence P *dostaneme graf, jehož netriviální komponenty jsou hranově 2-souvislé.*

(d) kontrahováním každé komponenty grafu $G - P$ *do jednoho vrcholu dostaneme cyklus.*

Příklad 5 (Robbinsova věta)**.** *Orientovaný graf* $\overrightarrow{G}$ *je silně souvislý, pokud pro každé jeho dva vrcholy* u *a* v *existují orientované cesty z* u *do* v *a z* v *do* u*.*

Dokažte, že hrany grafu G *lze zorientovat tak, že výsledný* $\overrightarrow{G}$ *je silně souvislý právě tehdy, když* G *je hranově 2-souvislý.*

Hint: může se hodit použití příkladu 4.

Příklad 6. *(a) Ukažte, že orientovaný graf je silně souvislý právě tehdy, když existuje alespoň jedna hrana opouštějící každou neprázdnou podmnožinu vrcholů* $X \subset V$*.*

(b) Ukažte, že každý turnaj (orientace úplného grafu) je silně souvislý právě tehdy, když obsahuje orientovaný Hamiltonovský cyklus.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/