

Základy kombinatoriky a teorie grafů — 8. cvičení*

23. dubna 2018

1 Rovinné grafy a jejich vlastnosti

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají oblouky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto oblouků se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G .

Zobrazení $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* $G = (V, E)$, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu* G , označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G .

Eulerova formule. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn jeho nakreslení. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf G splňuje $\chi(G) \leq 4$.*

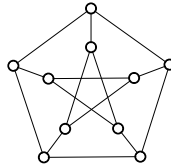
Kuratowského věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme jako f počet stěn jeho nakreslení.*

- (a) *Ukažte, že pro každý rovinný graf s $|V| \geq 3$ platí $|E| \leq 3|V| - 6$. Můžete bez důkazu využít fakt, že maximální rovinné grafy co do počtu hran jsou triangulace, což jsou rovinné grafy, pro které existuje rovinné nakreslení, v němž je každá stěna trojúhelník.*
- (b) *Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d -regulární rovinný graf? Jak velké d má ještě smysl uvažovat?*

Příklad 2. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5 , K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 3. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 4. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 5. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G , ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.*

Příklad 6 (*). *Bud' G rovinný graf neobsahující K_3 . Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>