

# Základy kombinatoriky a teorie grafů — 3. cvičení, 1. část\*

5. března 2018

## 1 Vytvořující funkce – úvod

**Příklad 1.** (a) Mějme polynomy  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$  a  $q(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6$ . Jaký je koeficient u členu  $x^7$  v jejich součinu  $p(x)q(x)$ ?

(b) Vracíme se z nákupu s pěti jednokilovými položkami a třemi dvoukilovými. Máme s sebou tašku, která unese maximálně sedm kilogramů. Kolika způsoby můžeme maximálně naplnit tašku?

**Příklad 2.** V cukrárně prodávají 3 druhy zákusků—větrníky, kremrole a dortíky. Kolika způsoby jde nakoupit 12 zákusků tak, abychom od každého druhu koupili aspoň dva kousky a zároveň koupili nanejvýš tři kremrole?

**Binomická věta.** Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \cdots + \binom{n}{n}x^n.$$

**Zobecněná binomická věta.** Pro libovolné  $r \in \mathbb{R}$  platí

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots,$$

kde  $\binom{r}{0} = 1$  a  $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}$  pro  $k \in \mathbb{N}$ .

## 2 Vytvořující funkce – počítání s mocninnými řadami

Mocninná řada je řada tvaru  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , kde  $a_i \in \mathbb{R}$  a  $x$  je reálná proměnná. Jako (obyčejnou) vytvořující funkci posloupnosti  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  označíme mocninnou řadu  $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ . Například funkce  $\frac{1}{1-x}$  je podle vzorce pro součet geometrické řady vytvořující funkcí posloupnosti  $(1, 1, 1, \dots)$  a podle binomické věty je  $(1+x)^n$  vytvořující funkcí posloupnosti  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots)$ . Přechod mezi posloupnostmi a funkcemi je pro tuto techniku klíčový.

**Tvrzení.** Bud'  $(a_0, a_1, \dots)$  posloupnost reálných čísel. Nechť existuje  $K$  takové, že  $|a_n| \leq K^n$  pro všechna  $n$ . Potom pro každé  $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$  řada  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  konverguje a hodnota jejího součtu definuje funkci  $a(x)$  proměnné  $x$  na uvedeném intervalu. Hodnotami  $a(x)$  na libovolně malém okolí 0 jsou všechny členy  $a_0, a_1, \dots$  jednoznačně určeny,  $a(x)$  má v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Příklad 3.** Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti (pokuste se je vyjádřit v uzavřeném tvaru):

(a)  $(0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \dots)$ ,

(b)  $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, \dots)$ ,

(c)  $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ ,

(d)  $(0, 2, 6, 12, 20, \dots)$ , tedy  $n$ -tý člen je součtem prvních  $n$  sudých přirozených čísel včetně nuly.

**Příklad 4.** Určete koeficient

(a) u  $x^{10}$  v  $\frac{2+x}{(1+3x)(1-2x)^2}$ ,

(b) u  $x^{2018}$  v  $\sin(x)$ .

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

**Příklad 5** (Řešení rekurencí). Zjistěte, čemu se rovná  $a_n$ , které je zadané rekurentní rovnicí  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$  a  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$  pro  $n \geq 0$ .

**Příklad 6.** Rozklad čísla  $n \in \mathbb{N}$  je zápis  $n$  jako součtu přirozených čísel (nezáleží nám na pořadí sčítanců).

(a) Nechť  $a_n$  značí počet rozkladů čísla  $n$ . Jaká je vytvořující funkce pro posloupnost  $(a_1, a_2, \dots)$ ?

(b) Ukažte, že počet rozkladů  $n$  na liché části se rovná počtu rozkladů  $n$  na vzájemně různé části.

| Základní operace s mocninnými řadami:          |                                                                         |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| $a(x) + b(x)$                                  | $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$                              |
| $\alpha a(x)$                                  | $(\alpha a_0, \alpha a_1, \alpha a_2, \dots)$                           |
| $a(\alpha x)$                                  | $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots, \alpha^i a_i, \dots)$           |
| $x^k a(x)$                                     | $(0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2)$ ( $k$ nul na začátku)                    |
| $a(x^k)$                                       | $(a_0, 0, \dots, 0, a_1, 0, \dots)$ (střídavě $k - 1$ nul)              |
| $\frac{a(x) - a_0 - \dots - a_k x^{k-1}}{x^k}$ | $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$                                        |
| $a'(x)$                                        | $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, i a_i, \dots)$                                |
| $\int_0^x a(t) dt$                             | $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots, \frac{a_i}{i+1}, \dots)$ |
| $a(x)b(x)$                                     | $(c_0, c_1, c_2, \dots)$ , kde $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$         |